

ТЕПЛОБМЕН ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОДВОДЕ ТЕПЛА К ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МАГНИТНОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

С.В. Соловьев

ВЦ ДВО РАН, г. Хабаровск

Представлены результаты численного моделирования нестационарного теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости в сферическом слое. Исследовано влияние малых значений магнитного числа Рейнольдса и теплоты джоулевой диссипации на эволюцию структуры течения жидкости, поле температуры, магнитной индукции и распределение чисел Нуссельта.

Ключевые слова: математическое моделирование, нестационарный теплообмен, магнитная гидродинамика, магнитное число Рейнольдса, теплота джоулевой диссипации, сферический слой.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде областей физики, механики и техники [1–11] возникает необходимость изучения движений электропроводных жидкостей и газов. К таким областям относятся астрофизика, аэродинамика больших скоростей, МГД генераторы, электромагнитные насосы, плазменные ускорители, сферические термоядерные реакторы. При изучении магнитной гидродинамики рассматриваются два класса задач, которые определяются величиной магнитного числа Рейнольдса Re_m : $Re_m \ll 1$ (жидкость с малой проводимостью) и $Re_m \gg 1$ (жидкость с большой проводимостью). Магнитное число Рейнольдса характеризует взаимодействие проводящих движущихся жидкостей и газов (плазмы) с магнитным полем. В работе [8] рассмотрен нестационарный теплообмен электропроводной жидкости при малых значениях Re_m для температурных граничных условий первого рода на поверхностях сферического слоя. Безразмерные числа подобия принимали следующие значения [8]: $d/D = 1/1,5$; $Gr = 10^3$; $Re_m = 10^{-1}$; 10^{-2} ; 10^{-3} ; 10^{-4} ; 10^{-5} ; 10^{-6} ; $Ho = Re = S = 1$; $Pe = 10$; $G = 1$. Целью настоящей работы является исследование теплообмена и магнитной гидродинамики жидкости (при тех же числах подобия из работы [8]), когда в отличие от результатов работы [8] для температуры заданы граничные условия смешанного типа (к внутренней поверхности слоя жидкости подводится тепло по закону Фурье, а на внешней задается постоянное значение температуры). Исследуется влияние теплоты джоулевой диссипации на теплообмен электропроводной жидкости. Вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру сферического слоя.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Математическая постановка задачи имеет вид [8, 9]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Ho} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{Gr}{Re^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \\ & + \frac{S}{Re_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \right. \\ & - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \\ & \left. \frac{2B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Ho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \\ & - \frac{J}{Pe} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{Ho} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \right.$$

$$+ \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big] + \frac{1}{Re_m} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{ctg\theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2B_\theta ctg\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{Ho} \frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(-B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{ctg\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right]. \quad (5)$$

Для температуры на внутренней Γ_1 ($r = 1$) и на внешней Γ_2 ($r = r_2$) поверхности сферического слоя задавались граничные условия второго и первого родов соответственно: $-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1} = 1$; $\mathcal{G} \Big|_{\Gamma_2} = 0$. На оси

симметрии ставилось условие: $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0$.

Граничные условия для функции тока, вихря и магнитной индукции имели следующий вид [9]:

$$\psi \Big|_{\Gamma_{1,2}} = \psi \Big|_{\theta=0,\pi} = \omega \Big|_{\theta=0,\pi} = 0; \quad \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0;$$

$$B_r \Big|_{\Gamma_1} = B_r \Big|_{\Gamma_2} = 0; \quad B_\theta \Big|_{\Gamma_1} = -0,01 \sin \theta; \quad B_\theta \Big|_{\Gamma_2} = 0,01 \sin \theta.$$

Локальные и осредненные числа Нуссельта на поверхности внутренней и наружной сферы рассчитывались по формулам:

$$Nu_1 = - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \Big|_{r_1}, \quad Nu_2 = -r_2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \Big|_{r_2}.$$

$$\overline{Nu}_1 = - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right]_{r_1} \sin \theta d\theta, \quad \overline{Nu}_2 = - \frac{r_2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right]_{r_2} \sin \theta d\theta.$$

Обозначения величин, используемых при записи системы уравнений (1)-(5), приведены в работе [9]. Численное решение задачи (1)-(5) осуществлялось методом конечных элементов [10].

На рис. 1-6 приведены результаты расчетов поля температуры, функции тока, вихря, магнитной индукции и распределений чисел Нуссельта для различных значений Re_m с учетом теплоты джоулевой диссипации. Для заданного температурного граничного условия на внутренней поверхности сферического слоя числа Нуссельта для всех рассмотренных режимов принимают значение $\overline{Nu}_1 = Nu_1 = 10$.

На рис. 1 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-1}$ в моменты времени (здесь и далее): 1- $\tau = 0,2$; 2- $\tau = 0,5$; 3- $\tau = 1$; 4- $\tau = 2$; 5- $\tau = 3$; 6- $\tau = 4$; 7- $\tau = 5$; 8- $\tau = 6$; 9- $\tau = 7$.

Теплообмен в слое для $\tau = 0,2-7$ осуществляется теплопроводностью. Изотермы представляют собой концентрические окружности (рис. 1а).

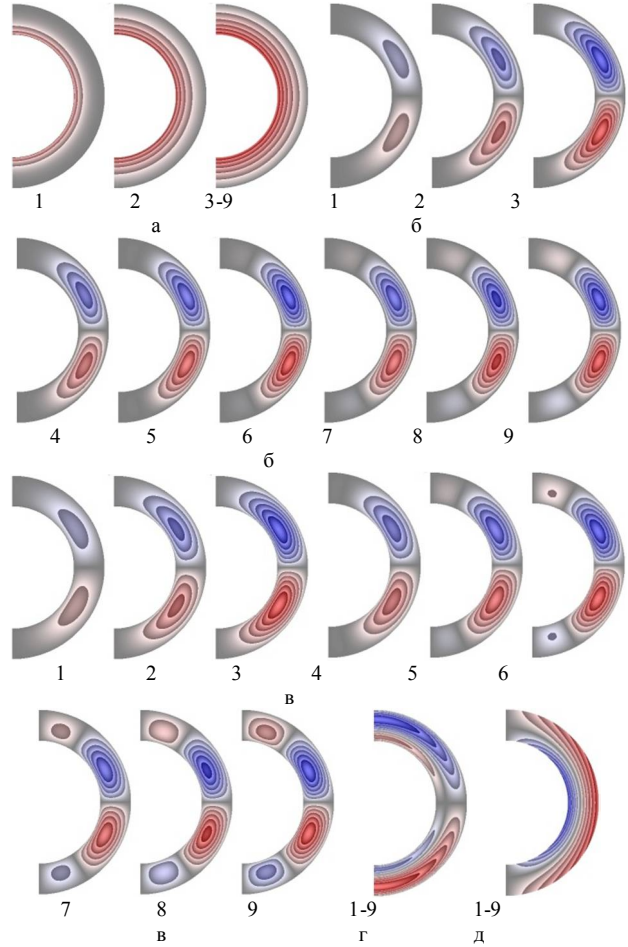


Рис. 1. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции

Максимальное значение температуры в слое жидкости с течением времени увеличивается: $\mathcal{G}_{max} = 2,750$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $\mathcal{G}_{max} = 3,359$ ($\tau = 2; 3; 4$); $\mathcal{G}_{max} = 3,371$ ($\tau = 5; 6; 7$).

Числа Нуссельта принимают следующие значения:

$$1 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 0,287; \quad 2 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 2,084.$$

$$3 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 4,385; \quad 4 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,126.$$

$$5 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,223; \quad 6 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,743.$$

$$7 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,775; \quad 8 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,783.$$

$$9 - Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,786.$$

При $\tau = 7$ наступает квазистационарное состояние. Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. Для рассмотренных моментов времени в слое жидкости образуются две крупномасштабные конвективные ячейки (рис. 1б): в северном полушарии отрицательные значения функции тока (синий цвет, “-”, жидкость движется по часовой стрелке), в южном – положительные значения (красный цвет, “+”, жидкость движется

против часовой стрелки). Для $\tau = 0,2-3$ в слое жидкости образуются два вихря (рис. 1в, 1-5). С течением времени ($\tau = 4-7$) в области полюсов образуются еще два вихря (рис. 1в, 6-9). Знаки величин вихря от северного полюса к южному изменяются в следующей последовательности: “+”, “-”, “+”, “-” (рис. 1в, 6-9). Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 8,06 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $2,27 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $3,15 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 3,61 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,01 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $1,42 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 5; 6; 7$). Поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (красный цвет – положительные значения, синий цвет – отрицательные), приведенные на рис. 1г и 1д, со временем не изменяются. Максимальные значения радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции для всех рассмотренных значений времени и Re_m не изменяются: $|B_{rmax}| = 1,49 \cdot 10^{-4}$; $|B_{\theta max}| = 10^{-2}$ (далее не приводятся).

Результаты расчетов для $Re_m = 10^{-2}$ показали, что поля функции тока и вихря качественно аналогичны результатам, приведенным на рис. 1б, в. В слое жидкости начинает зарождаться конвекция, но изотермы практически не отличаются от концентрических окружностей. Распределения локальных чисел Нуссельта на внешней поверхности (зеленая линия) слоя жидкости приведены на рис. 2.

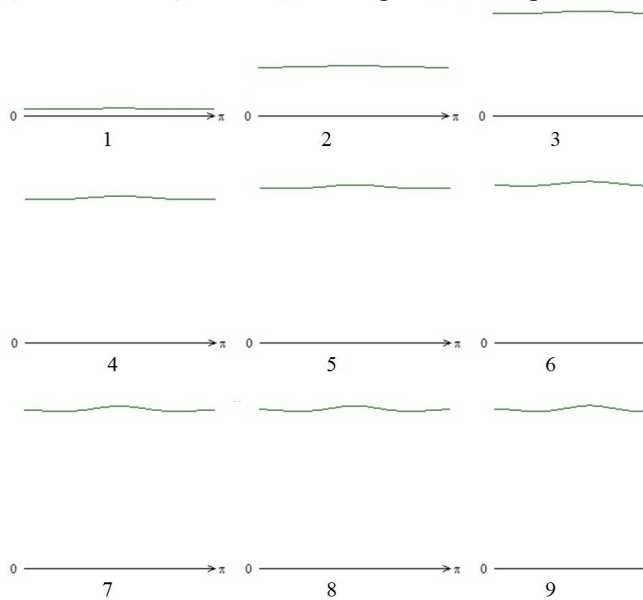


Рис. 2. Распределение чисел Нуссельта

Числа Нуссельта принимают следующие значения:

- 1 – $\overline{Nu}_2 = 0,285; 0,360 \leq Nu_2 \leq 0,327$.
- 2 – $\overline{Nu}_2 = 2,115; 2,080 \leq Nu_2 \leq 2,145$.
- 3 – $\overline{Nu}_2 = 4,425; 4,375 \leq Nu_2 \leq 4,470$.

- 4 – $\overline{Nu}_2 = 6,197; 6,130 \leq Nu_2 \leq 6,263$.
- 5 – $\overline{Nu}_2 = 6,666; 6,588 \leq Nu_2 \leq 6,750$.
- 6 – $\overline{Nu}_2 = 6,790; 6,704 \leq Nu_2 \leq 6,888$.
- 7 – $\overline{Nu}_2 = 6,824; 6,727 \leq Nu_2 \leq 6,945$.
- 8 – $\overline{Nu}_2 = 6,833; 6,728 \leq Nu_2 \leq 6,965$.
- 9 – $\overline{Nu}_2 = 6,835; 6,723 \leq Nu_2 \leq 6,978$.

При $\tau = 7$ наступает квазистационарное состояние. Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. Максимальное значение температуры в слое жидкости с течением времени увеличивается: $\vartheta_{max} = 2,763$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $3,384$ ($\tau = 2; 3; 4$); $3,404$ ($\tau = 5; 6; 7$). Максимальные величины функции тока и вихря принимают следующие значения: $|\Psi_{max}| = 8,10 \cdot 10^{-4}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $2,06 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $3,25 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 3,62 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $9,24 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $1,47 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 5; 6; 7$).

На рис. 3 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^{-3}$.

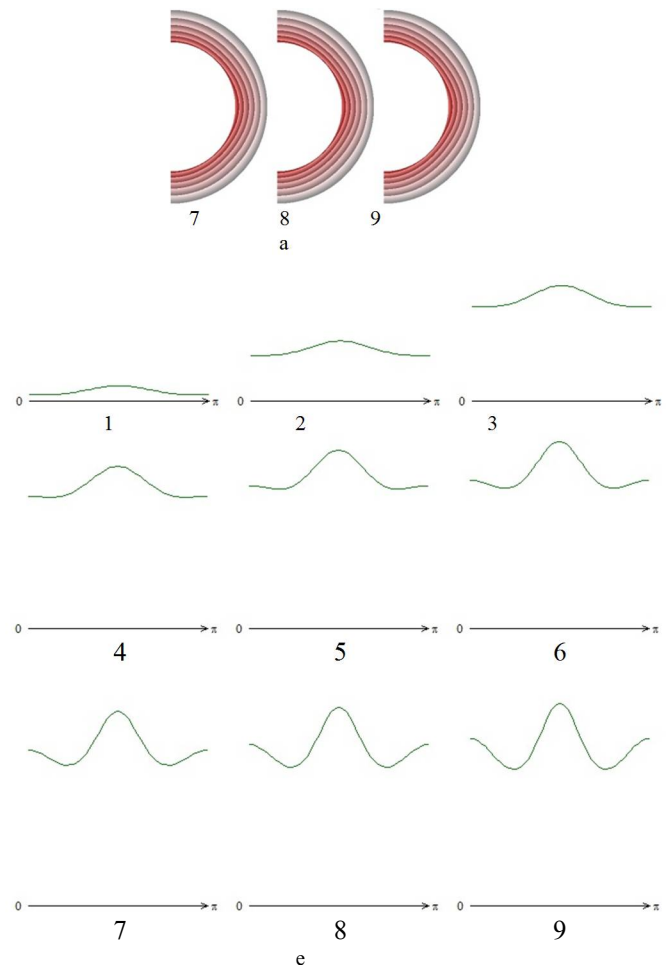


Рис. 3. Поле температуры (а), распределение чисел Нуссельта (е)

Оказалось, что поля функции тока и вихря качественно аналогичны результатам, приведенным на рис. 1б, в. В слое жидкости продолжает развиваться конвекция (рис. 3а, е). Распределения локальных чисел Нуссельта на внешней поверхности слоя жидкости приведены на рис. 3е. Для $\tau = 0,2; 0,5; 1; 2$ числа Нуссельта имеют один максимум (рис. 3е, 1-4), а для $\tau = 3; 4; 5; 6; 7$ – один максимум и два минимума (рис. 3е, 5-9). Числа Нуссельта принимают следующие значения:

1 – $\overline{Nu}_2 = 0,512; 0,285 \leq Nu_2 \leq 0,706$.

2 – $\overline{Nu}_2 = 2,424; 2,070 \leq Nu_2 \leq 2,726$.

3 – $\overline{Nu}_2 = 4,828; 4,328 \leq Nu_2 \leq 5,283$.

4 – $\overline{Nu}_2 = 6,694; 6,015 \leq Nu_2 \leq 7,423$.

5 – $\overline{Nu}_2 = 7,176; 6,386 \leq Nu_2 \leq 8,165$.

6 – $\overline{Nu}_2 = 7,298; 6,420 \leq Nu_2 \leq 8,527$.

7 – $\overline{Nu}_2 = 7,330; 6,361 \leq Nu_2 \leq 8,778$.

8 – $\overline{Nu}_2 = 7,339; 6,274 \leq Nu_2 \leq 8,978$.

9 – $\overline{Nu}_2 = 7,341; 6,182 \leq Nu_2 \leq 9,144$.

Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. Максимальное значение температуры: $\mathcal{G}_{max} = 2,896$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $3,673$ ($\tau = 2; 3; 4$); $3,768$ ($\tau = 5; 6; 7$). Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 8,21 \cdot 10^{-3}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $2,57 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $3,93 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 3,65 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,16$ ($\tau = 2; 3; 4$); $1,81$ ($\tau = 5; 6; 7$).

На рис. 4 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^4$.

Оказалось, что для $\tau = 0,2; 0,5; 1$ поля функции тока и вихря качественно аналогичны результатам, приведенным на рис. 1б, в 1-3. В отличие от результатов, приведенных на рис. 1-3, конвекция для $Re_m = 10^4$ имеет место уже на начальной стадии теплообмена (рис. 4а, 1). С течением времени интенсивность конвекции в слое жидкости увеличивается (рис. 4а, 4-6).

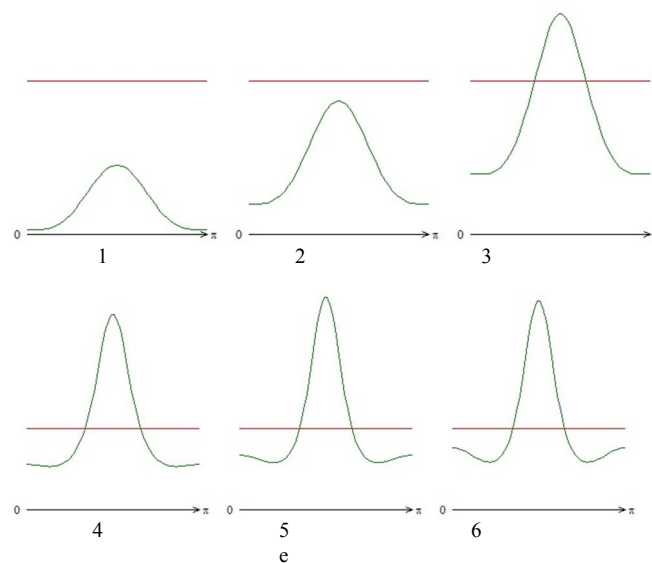
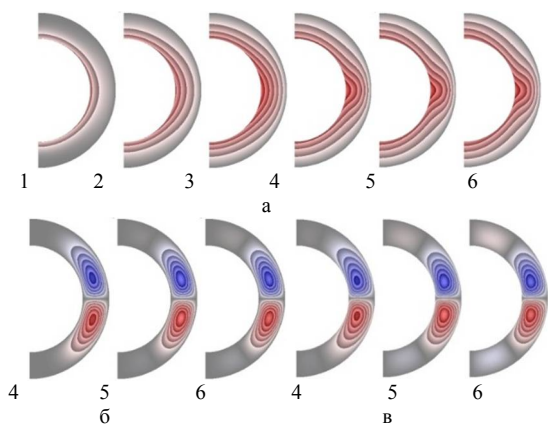


Рис. 4. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Значительные изменения происходят с полем температуры и распределением чисел Нуссельта (рис. 4а, е) по сравнению с результатами, приведенными на рис. 3а, е. Оказывается, что начиная со значения $Re_m = 10^4$ возрастает вклад теплоты джоулевой диссипации (магнитная вязкость увеличивается), что приводит к перестройке поля температуры и изменению интенсивности теплообмена на поверхностях слоя жидкости (рис. 4е, 4-6). Наибольшие градиенты температуры имеют место в экваториальной области (рис. 4а, 1-6), что соответствует максимуму в распределении чисел Нуссельта (рис. 4е, 1-6; на внутренней поверхности – красная линия, на внешней – зеленая). Для $\tau = 5; 6; 7$ поле температуры и распределение чисел Нуссельта качественно аналогичны результатам, полученным при $\tau = 4$ (рис. 4а, е, 6).

Числа Нуссельта принимают следующие значения:

1 – $\overline{Nu}_2 = 2,568; 0,284 \leq Nu_2 \leq 4,513$.

2 – $\overline{Nu}_2 = 5,575; 1,981 \leq Nu_2 \leq 8,706$.

3 – $\overline{Nu}_2 = 9,069; 3,937 \leq Nu_2 \leq 14,415$.

4 – $\overline{Nu}_2 = 12,076; 5,325 \leq Nu_2 \leq 24,076$.

5 – $\overline{Nu}_2 = 12,365; 5,792 \leq Nu_2 \leq 26,154$.

6 – $\overline{Nu}_2 = 12,277; 5,890 \leq Nu_2 \leq 25,668$.

7 – $\overline{Nu}_2 = 12,288; 5,884 \leq Nu_2 \leq 25,587$.

8 – $\overline{Nu}_2 = 12,296; 5,856 \leq Nu_2 \leq 25,576$.

9 – $\overline{Nu}_2 = 12,297; 5,832 \leq Nu_2 \leq 25,565$.

При $\tau = 7$ наступает стационарное состояние. Для $\tau = 0,2; 0,5; 1$ теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней (не смотря на то, что при $\tau = 1$ максимальное значение Нуссельта на внешней поверхности слоя $Nu_2 = 14,415$ превосходит

значение Нуссельта на внутренней поверхности $\overline{Nu}_1 = Nu_1 = 10$). С течением времени происходит изменение интенсивности теплообмена на поверхностях слоя жидкости. Для $\tau = 2-7$ теплообмен на внешней поверхности становится интенсивнее, чем на внутренней. Максимальное значение температуры: $\vartheta_{max} = 4,268$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $5,376$ ($\tau = 2; 3; 4$); $5,294$ ($\tau = 5; 6; 7$). Для $\tau = 5; 6; 7$ поля функции тока и вихря качественно аналогичны результатам, полученным при $\tau = 2; 3; 4$ (рис. 4б, в, 4-6). Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 9,25 \cdot 10^{-2}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $2,05 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $2,01 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 4,03$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $9,60$ ($\tau = 2; 3; 4$); $9,42$ ($\tau = 5; 6; 7$).

На рис. 5 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^5$.

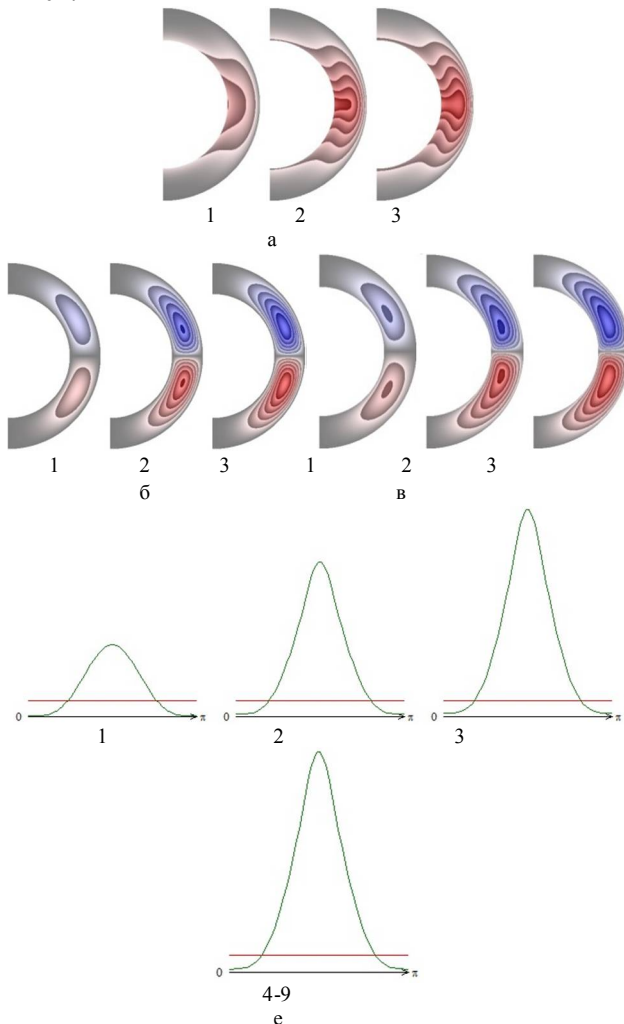


Рис. 5. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Уменьшение Re_m приводит к значительным изменениям поля температуры, функции тока, вихря и распределений чисел Нуссельта (рис. 5) по сравнению

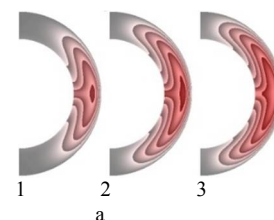
с результатами, приведенными на рис. 1-4. В поле температуры в экваториальной области образуется тепловая каверна (рис. 5а, 2, 3). Для $\tau = 2-7$ поле температуры качественно аналогично результату, полученному при $\tau = 1$ (рис. 5а, 3). Максимальное значение температуры: $\vartheta_{max} = 10,418$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $10,632$ ($\tau = 2; 3; 4$); $10,632$ ($\tau = 5; 6; 7$). Распределение чисел Нуссельта (рис. 5е) на внешней поверхности слоя жидкости имеет максимум. Начиная с $\tau = 2$ и по $\tau = 7$ распределение чисел Нуссельта качественно и количественно практически не изменяется (рис. 5е, 4-9).

Числа Нуссельта принимают следующие значения:

- 1 – $\overline{Nu}_2 = 24,109; 0,277 \leq Nu_2 \leq 44,488$.
- 2 – $\overline{Nu}_2 = 45,420; 1,392 \leq Nu_2 \leq 96,106$.
- 3 – $\overline{Nu}_2 = 59,648; 2,021 \leq Nu_2 \leq 128,509$.
- 4 – $\overline{Nu}_2 = 61,829; 2,006 \leq Nu_2 \leq 132,255$.
- 5 – $\overline{Nu}_2 = 61,906; 1,975 \leq Nu_2 \leq 132,382$.
- 6 – $\overline{Nu}_2 = 61,907; 1,973 \leq Nu_2 \leq 132,383$.
- 7 – $\overline{Nu}_2 = 61,907; 1,973 \leq Nu_2 \leq 132,384$.
- 8 – $\overline{Nu}_2 = 61,907; 1,973 \leq Nu_2 \leq 132,383$.
- 9 – $\overline{Nu}_2 = 61,908; 1,972 \leq Nu_2 \leq 132,384$.

При $\tau = 7$ наступает стационарное состояние. Интенсивность теплообмена на внешней поверхности слоя выше, чем на внутренней. В поле функции тока и вихря (рис. 5б, в) образуются две конвективные ячейки и два вихря. В конвективной ячейке и вихре северного полушария жидкость движется по часовой стрелке, а в южном полушарии – против часовой стрелки. Для $\tau = 0,2; 0,5; 1$ поля функции тока и вихря (рис. 5б, в) качественно аналогичны результатам, приведенным на рис. 1б, в 1-3. Для интервала времени $\tau = 2-7$ поля функции тока и вихря качественно аналогичны результатам, полученным при $\tau = 1$ (рис. 5б, в, 3). Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 6,19 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $6,30 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $6,30 \cdot 10^{-1}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 2,53 \cdot 10$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $2,56 \cdot 10$ ($\tau = 2; 3; 4$); $2,56 \cdot 10$ ($\tau = 5; 6; 7$).

На рис. 6 приведены результаты расчетов для $Re_m = 10^6$. С уменьшением значения Re_m на порядок происходят дальнейшие изменения поля температуры, функции тока, вихря и распределений чисел Нуссельта (рис. 6) по сравнению с результатами, приведенными на рис. 5.



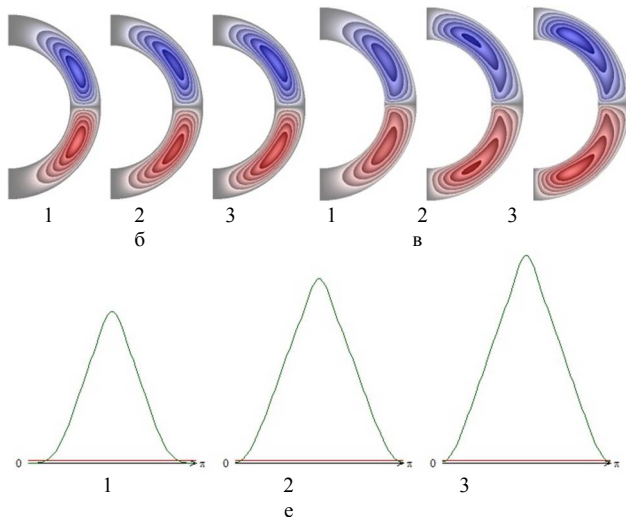


Рис. 6. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

Форма тепловой каверны изменяется, масштаб ее увеличивается (рис. 6а) по сравнению с результатом, приведенным на рис. 5а. С течением времени максимальные значения температуры в сферическом слое жидкости продолжают увеличиваться: $\mathcal{G}_{max} = 46,796$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $48,106$ ($\tau = 2; 3; 4$); $48,106$ ($\tau = 5; 6; 7$). Числа Нуссельта принимают следующие значения:

- 1 – $\overline{Nu}_2 = 336,023; 0,427 \leq Nu_2 \leq 641,533$.
- 2 – $\overline{Nu}_2 = 472,108; 4,687 \leq Nu_2 \leq 781,420$.
- 3 – $\overline{Nu}_2 = 541,522; 7,843 \leq Nu_2 \leq 878,498$.
- 4 – $\overline{Nu}_2 = 557,387; 8,656 \leq Nu_2 \leq 900,163$.
- 5 – $\overline{Nu}_2 = 558,018; 8,689 \leq Nu_2 \leq 901,027$.
- 6 – $\overline{Nu}_2 = 558,037; 8,690 \leq Nu_2 \leq 901,052$.
- 7 – $\overline{Nu}_2 = 558,038; 8,690 \leq Nu_2 \leq 901,054$.
- 8 – $\overline{Nu}_2 = 558,040; 8,690 \leq Nu_2 \leq 901,055$.
- 9 – $\overline{Nu}_2 = 558,040; 8,690 \leq Nu_2 \leq 901,056$.

При $\tau = 7$ наступает стационарное состояние. Интенсивность теплообмена на внешней поверхности слоя выше, чем на внутренней. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 1,59$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $1,58$ ($\tau = 2; 3; 4; 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 8,36 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $8,64 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 2; 3; 4; 5; 6; 7$).

На рис. 7-9 приведены результаты расчетов без учета теплоты джоулевой диссипации (в уравнении (3) $J = 0$), позволяющие оценить ее влияние на теплообмен и магнитную гидродинамику жидкости.

На рис. 7 приведены результаты для $Re_m = 10^{-1}$.

Для $\tau = 0,2-7$ теплообмен в слое осуществляется теплопроводностью. Поле температуры аналогично результату, приведенному на (рис. 1а). Не учет

теплоты джоулевой диссипации приводит к изменению направления движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях (рис. 7б, в) на противоположное по сравнению с соответствующими результатами, приведенными на рис. 1-6.

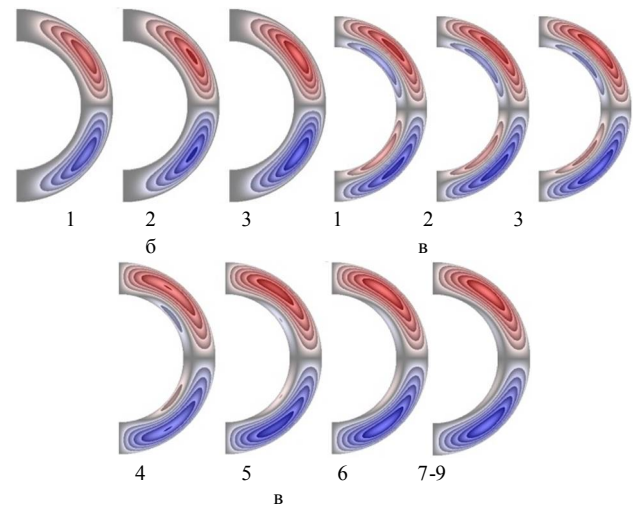


Рис. 7. Поля функции тока (б), вихря (в)

При не учете теплоты джоулевой диссипации поля функции тока и вихря (рис. 7б, в) отличаются от соответствующих полей, приведенных на рис. 1б, в. Ниже приведены количественные значения расчетных функций: $\mathcal{G}_{max} = 2,749$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $\mathcal{G}_{max} = 3,356$ ($\tau = 2; 3; 4$); $\mathcal{G}_{max} = 3,367$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\Psi_{max}| = 3,09 \cdot 10^{-7}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $4,80 \cdot 10^{-7}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $5,31 \cdot 10^{-7}$ ($\tau = 5; 6; 7$); $|\omega_{max}| = 2,11 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 0,2; 0,5; 1$); $2,92 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 2; 3; 4$); $3,10 \cdot 10^{-5}$ ($\tau = 5; 6; 7$). Числа Нуссельта:

- 1 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 0,285$; 2 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 2,080$.
- 3 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 4,380$; 4 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,121$.
- 5 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,617$; 6 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,737$.
- 7 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,769$; 8 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,778$.
- 9 – $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,780$.

При $\tau = 7$ наступает стационарное состояние. Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. Оказалось, что поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции для всех рассмотренных моментов времени и чисел Re_m , качественно и количественно аналогичны соответствующим полям, полученным при учете теплоты джоулевой диссипации. Поля функции тока и вихря, рассчитанные для $Re_m = 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}$, оказались качественно аналогичными результатам, приведенным на рис. 7б, в. Для $Re_m = 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}$ в слое жидкости теплопроводность. Для $Re_m = 10^{-4}$ в жидкости зарождается конвекция, интенсивность которой возрастает при $Re_m = 10^{-5}; 10^{-6}$.

Значения расчетных функций для различных Re_m приведены ниже (из-за ограничения объема статьи рассмотрен момент времени $\tau = 7$).

$Re_m = 10^{-2}$: $\mathcal{G}_{max} = 3,367$; $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,780$; $|\Psi_{max}| = 5,44 \cdot 10^{-6}$; $|\omega_{max}| = 2,95 \cdot 10^{-4}$.

$Re_m = 10^{-3}$: $\mathcal{G}_{max} = 3,367$; $Nu_2 = \overline{Nu}_2 = 6,780$; $|\Psi_{max}| = 5,49 \cdot 10^{-5}$; $|\omega_{max}| = 2,95 \cdot 10^{-3}$.

$Re_m = 10^{-4}$: $\mathcal{G}_{max} = 3,373$; $\overline{Nu}_2 = 6,780$; $6,766 \leq Nu_2 \leq 6,809$; $|\Psi_{max}| = 5,49 \cdot 10^{-4}$; $|\omega_{max}| = 2,96 \cdot 10^{-2}$.

$Re_m = 10^{-5}$: $\mathcal{G}_{max} = 3,428$; $\overline{Nu}_2 = 6,781$; $6,648 \leq Nu_2 \leq 7,106$; $|\Psi_{max}| = 5,37 \cdot 10^{-3}$; $|\omega_{max}| = 3,01 \cdot 10^{-1}$.

Зарождается конвекция. При $\tau = 7$ наступает квазистационарное состояние. Распределение чисел Нуссельта приведено на рис. 8.



Рис. 8. Распределение чисел Нуссельта

$Re_m = 10^{-6}$ (рис. 9): $\mathcal{G}_{max} = 4,164$; $\overline{Nu}_2 = 6,783$; $5,962 \leq Nu_2 \leq 12,787$; $|\Psi_{max}| = 4,45 \cdot 10^{-2}$; $|\omega_{max}| = 3,58$. В слое жидкости конвекция. Наступает квазистационарное состояние.

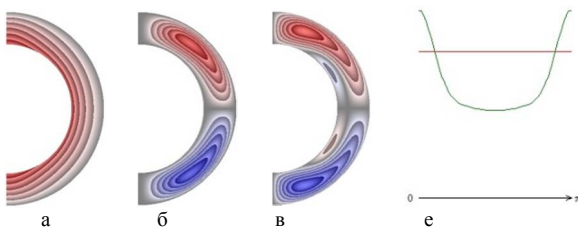


Рис. 9. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), распределение чисел Нуссельта (е)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. При учете теплоты джоулевой диссипации для $Re_m = 10^{-5}$; 10^{-6} происходят значительные изменения полей температуры, функции тока, вихря и распределений чисел Нуссельта по сравнению с соответствующими результатами для $Re_m = 10^{-1}-10^{-4}$.

2. При учете теплоты джоулевой диссипации для $Re_m = 10^{-1}-10^{-3}$ теплообмен на внутренней поверхности слоя жидкости интенсивнее, чем на внешней. При $Re_m = 10^{-4}-10^{-6}$ происходит изменение интенсивности теплообмена на поверхностях слоя жидкости –

теплообмен на внешней поверхности становится значительнее, чем на внутренней поверхности.

3. При не учете теплоты джоулевой диссипации для $Re_m = 10^{-1}-10^{-6}$ теплообмен на внутренней поверхности слоя жидкости интенсивнее, чем на внешней.

4. Для $Re_m = 10^{-1}-10^{-6}$ поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции одинаковые как при учете, так и не учете теплоты джоулевой диссипации.

5. Результаты, полученные при смешанных температурных граничных условиях, имеют значительные отличия по сравнению с результатами, полученными при температурных граничных условиях первого рода [8].

6. Полученные результаты позволяют проследить эволюцию теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости в сферическом слое при малых магнитных числах Рейнольдса, а также оценить влияние теплоты джоулевой диссипации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Elkhazen M. I., Hassen W., Gannoun R., Hussein A. K. and Borjini M. N. Numerical study of electroconvection in a dielectric layer between two cofocal elliptical cylinders subjected to unipolar injection. Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92, № 5. С. 2358.
 2. Кашевский С. Б., Кашевский Б. Э., Худoley А. Л. Экспериментальная модель для исследования динамики магнитных дисперсий в градиентном магнитном поле. Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 1. С. 184.
 3. Ahmed N. Heat and mass transfer in mhd poiseuille flow with porous walls. Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92, № 1. С. 128.
 4. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. Магнитная гидродинамика и теплоперенос во вращающихся потоках. Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92, № 1. С. 174.
 5. Федоров С. В. Усиление магнитного поля в струйных течениях проводящих материалов: соударение двух струй с магнитным полем. Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 3. С. 675-685.
 6. Ковалева Л. А., Мухарямова Г. И. Влияние электромагнитной обработки на реологические свойства нефти: эксперимент и приложение. Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 3. С. 734-740.
 7. Belabid J. Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption. Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 4. С. 960-965.
 8. Соловьев, С.В., Соловьева Т.С. Теплообмен электропроводной жидкости при малых значениях магнитного числа Рейнольдса // Южно-Сибирский научный вестник. – 2021. – № 2. – С. 71-79.
 9. Соловьев, С.В. Теплообмен и магнитная гидродинамика электропроводной жидкости в сферическом слое // Южно-Сибирский научный вестник. – 2020. – № 4. – С. 16-24.
 10. Solov'yov S. V. Simulation of Convective Heat Exchange in the Electrically Conducting Liquid in a Spherical Cavity. Algorithm of Solution // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88. – Issue 6. – P. 1416-1431.
 11. Соловьев С. В. Влияние числа гомохронности на теплообмен электропроводной жидкости в сферическом слое // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2018. – № 4. – С. 57-66.
- Соловьев Сергей Викторович – д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник ВЦ ДВО РАН, г. Хабаровск, тел.+7 (4212)22-72-67, e-mail: solovjovsv@rambler.ru.

HEAT EXCHANGE OF ELECTRIC CONDUCTIVE LIQUID IN THE SUPPLY OF HEAT TO THE INNER SURFACE OF THE SPHERICAL LAYER AT SMALL VALUES OF THE REYNOLD'S MAGNETIC NUMBER

S.V. Solov'yov

Abstract – The results of numerical simulation of unsteady heat transfer and magneto hydrodynamics of an electrically conductive fluid in a spherical layer are presented. The influence of small values of the magnetic Reynolds number and the heat of Joule dissipation on the evolution of the structure of the fluid flow, the field of temperature, magnetic induction and the distribution of Nusselt numbers is investigated.

Index terms: mathematical modeling, unsteady heat transfer, magneto hydrodynamics, magnetic Reynolds number, heat of Joule dissipation, spherical layer.

REFERENCES

1. Elkhazen M. I., Hassen W., Gannoun R., Hussein A. K. and Borjini M. N. "Numerical study of electroconvection in a dielectric layer between two cofocal elliptical cylinders subjected to unipolar injection," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 92, issue. 5, pp. 1318-1329, 2019.
2. Kashevskii S.B., Kashevskii B. É., Khudolei A.L. "An experimental model for investigating the dynamics of magnetic dispersions in a gradient magnetic field," *Journal of engineering physics and thermophysics*, vol. 91, issue. 1, pp. 172-180, 2018.
3. Ahmed N. "Heat and mass transfer in mhd poiseuille flow with porous walls," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 92, issue. 1, pp. 122-131, 2019.
4. Borisevich V.D., Potanin E.P. "Magneto hydrodynamics and heat transfer in rotating flows," *Journal of engineering physics and thermophysics*, vol. 92, issue. 1, pp. 169-175, 2019.
5. Fedorov S.V. "Intensification of the magnetic field in jet flows of conducting materials: collision of two such flows," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 94, issue. 3, pp. 654-665, 2021.
6. Kovaleva L.A., G. I. Mukharyamova G.I. "Effects of electromagnetic treatment on rheological properties of oil: experiment and application," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 94, issue. 3, pp. 714-719, 2021.
7. Belabid J. "Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 94, no. 4, pp. 960-965, 2021.
8. Solov'ev S.V., Solov'eva T.S. "Heat exchange of electric conductive liquid for small Reynolds' magnetic number," *yuzhno-sibirskij nauchny'j vestnik*, no. 2, pp. 71-79, 2021.
9. Solov'yov S.V. "Heat exchange and magnetic hydrodynamics electric conductive liquid in a spherical layer," *yuzhno-sibirskij nauchny'j vestnik*, no. 4, pp. 16-24, 2020.
10. Solov'yov S. V. "Simulation of Convective Heat Exchange in the Electrically Conducting Liquid in a Spherical Cavity. Algorithm of Solution," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 88, issue 6, pp. 1416-1431, 2015.
11. Solov'ev S. V. "The influence of the homochronicity number on the heat transfer of an electrically conducting fluid in a spherical layer," *Vestnik Tixookeanskogo gosudarstvennogo universiteta*, no. 4, pp. 57-66, 2018.

Solovyov Sergey Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher of Computing Center of Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 65 Kim Yu Chen st., Khabarovsk, 680000, Russia, tel. +7 (4212)22-72-67, e-mail: solovjovsv@rambler.ru.