 DOI 10.25699/SSSB.2021.36.2.018

05.13.18

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ РАБОТОЙ САЙТОВ

Е.А. Андреева, В.И. Суворов, А. В. Лобанов
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской Государственный Университет», г. Тверь

Актуальность данного исследования, приведенного в статье, обусловлена возникающими техническими и экономическими проблемами, в частности с оптимальным определением размеров инфраструктуры с точки зрения информационных технологий для сайта, который сможет обеспечить должное качество обслуживания клиентских запросов. Делать прогнозы в работе данных сайтов при многократном увеличении нагрузки на них. В статье рассматривается задача оптимального управления, которая формализует управление клиентской базы сайтов с помощью пропускной способности каналов связи и с помощью увеличения скорости работы самого сайта за счет повышения его привлекательности. Сформулированы необходимые условия оптимальности поставленной задачи. Исследуется устойчивость найденных положений равновесия. Найдены условия асимптотической устойчивости. Приведены результаты численных экспериментов для работы двух сайтов и сделан анализ полученного решения. Данная статья представляет практическую ценность для разработчиков, администраторов и аналитиков веб сайтов.

Ключевые слова: математическая модель, пропускная способность канала, оптимальное управление, нелинейная система дифференциальных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Интернет представляет собой постоянно развивающуюся систему, которая расширяется за счет новых компонентов и услуг непрерывно возрастающими темпами. Приложения, реализующие такие концепции, как электронная коммерция, цифровые библиотеки, видео по требованию и дистанционное обучение, значительно увеличивают web-трафик [1].

Некоторые популярные web-сайты получают миллионы запросов в день, часто не обеспечивая при этом достаточно малое время отклика. Большое время отклика становится источником разочарования для многих пользователей и проблемой для менеджеров многих web-сайтов.

Самая же большая проблема для администраторов сайтов связана с адекватным определением размеров инфраструктуры с точки зрения информационных технологий для сайта, который сможет обеспечить должное качество обслуживания. Администраторы должны отслеживать производительность своих web-сайтов и предлагаемых ими услуг, т.е. оценивать интенсивность нагрузки, обнаруживать узкие места, а также прогнозировать будущее сокращение производительности [2].

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим n web-сайтов, которые предоставляют услуги пользователю и соревнуются за одну и ту же группу клиентов.

Каждый сайт применяет различные стратегии, позволяющие сайту i увеличить свою клиентскую базу x_i ($x_i \geq 0$): от рекламы до уменьшения цен. Отметим, что, если x_i - это доля абонентов, которые являются клиентами i web-сайта, она может, в общем случае, рассматриваться как часть населения, которая знает о существовании сайта. Клиентскую базу можно определить по количеству пользователей, сохранивших адрес сайта в закладках Интернет - обозревателя [3].

Эволюция во времени клиентской базы $x_i(t)$, соответствующей сайту i, будем определять двумя основными факторами: пропускной способностью сайта и конкуренцией с другими сайтами.

Предполагаем, что клиентская база растет со скоростью пропорциональной коэффициенту α_i ($\alpha_i \geq 0$), достигая насыщения на уровне β_i ($\beta_i \geq 0$), которая определяется пропускной способностью сайта, т.е. возможностью обслуживать заданное количество посетителей в единицу времени.

Если другие сайты предоставляют схожие услуги, уровень конкуренции определяет, посетит ли пользователь несколько соревнующихся сайтов (низкий уровень конкуренции) или же, посетив один, не захочет заходить на сайты-конкуренты (высокий уровень конкуренции). В частности, условия конкуренции могут быть представлены следующим образом: если оба сайта предоставляют одинаковые услуги, то часть абонентов перестанут пользоваться одним из них.

Введем коэффициенты соревнования или конкуренции γ_{ij} ($\gamma_{ij} \geq 0$), тогда изменение доли клиентской базы пользователей сайта i, в пользу сайта j, определяется величиной $\gamma_{ij}x_ix_j$.

Каждый сайт может терять клиентов со скоростью $m_i x_i$. При этом уход абонентов не связан с пропускной способностью или конкурентной борьбой между сайтами.

Используя введенные выше обозначения, выпишем систему дифференциальных уравнений, описывающих изменение клиентской базы сайтов $x_i(t)$ на заданном интервале времени [0, T] (T - фиксировано).

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_i(\beta_i - x_i) - m_i x_i - \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} x_i x_j,\ i, j = \overline{1, n}.$$

Для построения математической модели управления параметры α_i и β_i ($i = \overline{1,n}$) рассмотрим как функции времени, которые выбираются из условия максимизации общей прибыли, получаемой от работы сайтов. Тогда управляемая система запишется в виде

$$\dot{x}_i = x_i(v_i - x_i)u_i - m_i x_i - \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} x_i x_j, \quad (1)$$

где $u_i(t)$ – функция управления, характеризующая продвижение и популяризацию web-ресурса; $v_i(t)$ – функция управления пропускной способностью сайта в единицу времени ($j, i = \overline{1,n}$).

В силу технических и экономических ограничений функции управления удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} 0 \le w_i \le u_i(t) \le \overline{w}_i,\quad t \in [0,T],\ i = \overline{1,n}; \\ 0 \le s_i \le v_i(t) \le \overline{s}_i,\quad t \in [0,T],\ i = \overline{1,n}. \end{gathered}, \quad (2)$$

где w_i ($\overline{w}_i$)– минимальная (максимальная) скорость распространения информации о web-ресурсе; s_i ($\overline{s}_i$)– наименьшая (наибольшая) пропускная способность пользовательской базы сайта соответственно.

Задача оптимального управления интернет-сайтами состоит в определении функций управления, максимизирующих общую прибыль, получаемую от работы сайтов:

$$J(u,v) = \int_0^T \sum_{i=1}^n (\rho_i(t) x_i(t) - c_i u_i(t) - b_i v_i(t))dt, \quad (3)$$

где $\rho_i(t)$ – прибыль, которую приносит клиент i-го сайта; $c_i u_i(t)$ – стоимость рекламной кампании и продвижения интернет - ресурса; $b_i v_i(t)$ – стоимость увеличения пропускной способности сайта.

Для примера рассмотрим задачу оптимального управления двумя сайтами. Система дифференциальных уравнений (1), описывающая динамику изменения клиентской базы для двух сайтов, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 u_1(v_1 - x_1) - m_1 x_1 - \gamma_{12} x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 u_2(v_2 - x_2) - m_2 x_2 - \gamma_{21} x_1 x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть u_i =const и v_i =const, удовлетворяющие условию (2).

Рассмотрим задачу (2) – (4) в предположении, что на исследуемом промежутке времени [0, T] потери клиентов незначительны и не влияют на общую прибыль от работы сайтов, т.е. $m_i = 0$, $i = 1,2$.

В этом случае система (4) имеет четыре стационарные точки, которые зависят от параметров модели.

1) Тривиальное нулевое положение равновесия $x^*=(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Далее рассматриваться не будет.

2) Второе положение равновесия определяется точкой

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, v_2),\ u_2 \neq 0.$$

3) Третья стационарная точка имеет вид

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (v_1, 0),\ u_1 \neq 0.$$

4) В последнем случае предполагаем, что $x_i \neq 0$, i= 1,2, тогда положение равновесия определяется из следующих условий

$$\begin{aligned} u_1(v_1 - x_1) - \gamma_{12} x_2 &= 0, \\ u_2(v_2 - x_2) - \gamma_{21} x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Стационарная точка имеет вид

$$x^*=(x_1^*, x_2^*)=\left(\frac{u_2(v_2\gamma_{12} - u_1 v_1)}{\gamma_{12}\gamma_{21} - u_1 u_2}, \frac{u_1(v_1\gamma_{21} - u_2 v_2)}{\gamma_{12}\gamma_{21} - u_1 u_2}\right).$$

Для анализа устойчивости полученных стационарных состояний нелинейной системы (4) используем метод Ляпунова по первому приближению – метод линеаризации системы в окрестности точек равновесия. Пусть $z = x - x^*$, тогда матрица линеаризованной в окрестности положения равновесия x^* системы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 - 2u_1 x_1^* - \gamma_{12} x_2^* & -\gamma_{12} x_1^* \\ -\gamma_{21} x_2^* & u_2 v_2 - 2u_2 x_2^* - \gamma_{21} x_1^* \end{pmatrix}.$$

Исследуем состояние системы в окрестности точек равновесия. Для этого определим собственные числа матрицы, решая характеристические уравнения.

Для точки $(x_1^*, x_2^*) = (0, v_2)$ собственные числа определены равенствами $\lambda_1 = -u_2 v_2$, $\lambda_2 = u_1 v_1 - \gamma_{12} v_2$. Следовательно, положение равновесия в точке $(0, v_2)$ является асимптотически устойчивым, если $v_1 u_1 < \gamma_{12} v_2$.

Аналогично, в точке $(x_1^*, x_2^*) = (v_1, 0)$ положение равновесия является асимптотически устойчивым, если $v_2 u_2 < \gamma_{21} v_1$.

В четвертом случае, используя условия (5), получаем равенство для определения собственных чисел:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b_{11} + b_{22} \pm \sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b_{12}b_{21}}}{2},$$

где $b_{11} = -u_1 x_1^* = \dfrac{-u_1 u_2(v_2\gamma_{12} - u_1 v_1)}{\gamma_{12}\gamma_{21} - u_1 u_2}$,

$$b_{12} = -\gamma_{12} x_1^* = \frac{-\gamma_{12} u_2 (v_2 \gamma_{12} - u_1 v_1)}{\gamma_{12} \gamma_{21} - u_1 u_2},$$

$$b_{21} = -\gamma_{21} x_2^* = \frac{-\gamma_{21} u_1 (v_1 \gamma_{21} - u_2 v_2)}{\gamma_{12} \gamma_{21} - u_1 u_2},$$

$$b_{22} = -u_2 x_2^* = \frac{-u_2 u_1 (v_1 \gamma_{21} - u_2 v_2)}{\gamma_{12} \gamma_{21} - u_1 u_2}.$$

Здесь в зависимости от соотношений между параметрами задачи может возникать устойчивое, неустойчивое и асимптотически устойчивое положение равновесия.

Сформулируем необходимые условия оптимальности для задачи (1) – (3) (рассматриваем регулярный случай) [4]. Для этого выпишем функцию Понтрягина.

$$H(t,x,u,p(t)) = \sum_{i=1}^{2} (\rho_i x_i - c_i u_i - b_i v_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} p_i(t)(x_i(v_i - x_i)u_i - m_i x_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{2} \gamma_{ij} x_i x_j),$$

где $p_i(t)$ – не равные нулю одновременно, абсолютно непрерывные сопряженные вектор-функции ($i = 1, 2$).

Сопряженные функции являются решением системы дифференциальных уравнений с условиями трансверсальности на правом конце траектории

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\rho_1 - p_1(t) v_1(t) u_1(t) + 2x_1(t) p_1(t) u_1(t) + \\ &+ p_1(t)(m_1 + \gamma_{12} x_2(t)) + p_2(t) \gamma_{21} x_2(t), \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_2(t) &= -\rho_2 - p_2(t) v_2(t) u_2(t) + 2x_2(t) p_2(t) u_2(t) + \\ &+ p_2(t)(m_2 + \gamma_{21} x_1(t) + p_1(t) \gamma_{12} x_1(t), \end{aligned},$$

$$p_i(T) = 0, \quad i = 1,2.$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление доставляет максимум функции Понтрягина и определяется из следующих конечномерных задач

$$\left[-c_1 u_1 - b_1 v_1 + p_1 x_1 (v_1 - x_1) u_1\right] \xrightarrow[u_1, v_1]{} \max,$$

$$\left[-c_2 u_2 - b_2 v_2 + p_2 x_2 (v_2 - x_2) u_2\right] \xrightarrow[u_2, v_2]{} \max.$$

Исследуем два варианта оптимизации.

В первом случае в качестве функции оптимального управления рассмотрим управление пропускной способностью сайтов $v_i(t)$. При этом функции управления, характеризующие скорость продвижения web-ресурса, определим как константы, т.е. $u_i(t) = \alpha_i$. Тогда функции управления входят линейно в функцию Понтрягина и будут определяться из условия:

$$v_i(t) = \begin{cases} \bar{s}_i, & -b_i + p_i(t) x_i(t) \alpha_i \geq 0, \\ s_i, & -b_i + p_i(t) x_i(t) \alpha_i < 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Во втором случае оптимизировать процесс работы сайтов будем за счет варьирования функции управления, характеризующей интенсивность популяризации web-ресурса в обществе $u_i(t)$. Положив $v_i(t) = \beta_i = \text{const}$, выпишем условие для определения оптимального управления.

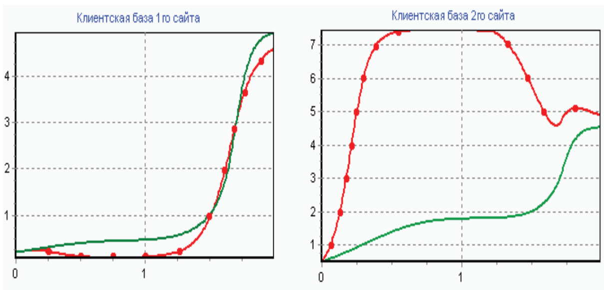
$$u_i(t) = \begin{cases} \overline{w}_i, & -c_i + p_i(t) x_i(t)(\beta_i - x_i(t)) \geq 0, \\ w_i, & -c_i + p_i(t) x_i(t)(\beta_i - x_i(t)) < 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Далее для нахождения численного решения, используем построенные две краевые задачи: (4), (6), (7) и (4), (6), (8).

Пусть функция, характеризующая прибыль от одного клиента для i-го сайта, $\rho_i(t) = \rho_i = \text{const}$. Рассмотрим влияние ρ_i на оптимальное решение задачи.

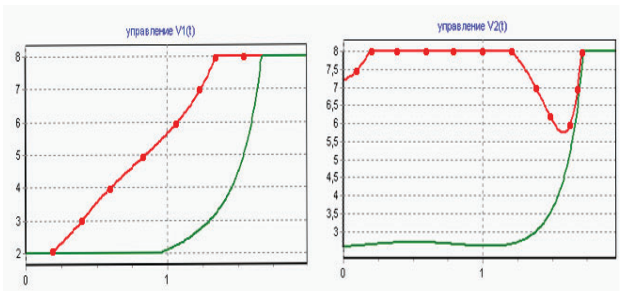
Для эксперимента выбраны следующие значения параметров: $x_1(0)=0,2$; $x_2(0)=0,5$; $\gamma_{12}=1,1$; $\gamma_{21}=1,2$; $c_i=0,05$; $b_i=0,09$; $u_i(t) = \alpha_i = 1$; $i = 1,2$.

Ниже представлены графики, показывающие влияние цен ρ_i на количественное изменение группы клиентов (рис. 1-2).



$\rho_1 = 0,5$; $\rho_2 = 0,9$; $\rho_1 = 0,5$; $\rho_2 = 1$

Рис. 1. Динамика численности клиентской базы



$\rho_1 = 0,5$; $\rho_2 = 0,9$; $\rho_1 = 0,5$; $\rho_2 = 1$

Рис. 2. Динамика пропускной способности web-сайтов

Легко увидеть, что оптимальное управление соответствует принципу максимума, что подтверждается постоянством функции Понтрягина на оптимальном процессе. Наряду с классическим решением при выбранных значениях параметров имеет место особое оптимальное управление, которое характеризуется тем, что управление принимает не только граничные значения множества допустимых управлений, но и промежуточные.

Численно определены моменты переключения функций управления. При $\rho_1 = 0,5$ и $\rho_2 = 0,9$ управление $v_1(t)$ имеет две точки переключения (при

t= 0,1875 и t=1,375), управление $v_2(t)$ три точки (t=0,25, t=1,25 и t=1,75).

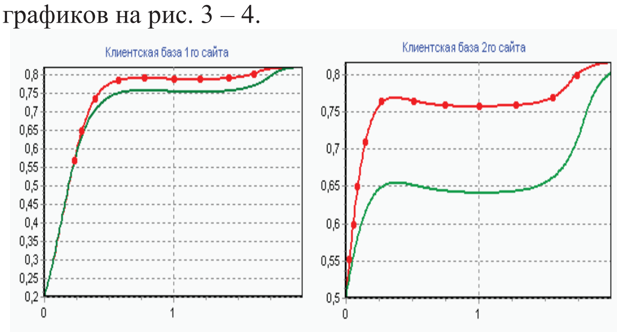
При ρ_1 =0,5 и ρ_2 = 1 функция $v_1(t)$ имеет две точки переключения (при t= 0,875 и t=1,675), функция $v_2(t)$ две точки (t=1,125 и t=1,75).

Увеличение ρ_i эквивалентно уменьшению цены пропускной способности сайтов в единицу времени, приходящуюся на одного клиента, что приводит к уменьшению общей прибыли, получаемой от работы сайтов.

Для задачи (4), (6), (7) исследуем зависимость динамики численности клиентской базы сайтов от стоимости продвижения интернет - ресурса.

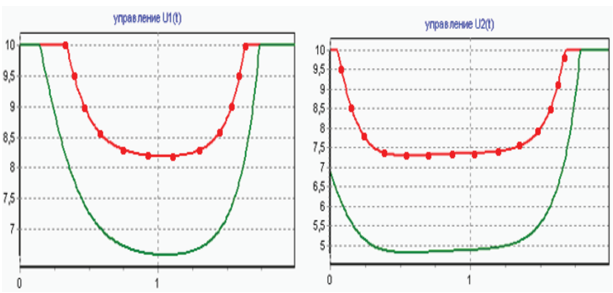
Выберем следующие параметры модели: $x_1(0)=0{,}2$; $x_2(0)=0{,}5$; $\rho_1 = \rho_2 = 0{,}5$; $\gamma_{12} = \gamma_{21} =1$; $v_i(t) = \beta_i= 1$; i =1,2.

Оптимальное решение представлено в виде графиков на рис. 3 – 4.



c_1 =0,005; c_2 = 0,01; c_1 =0,015; c_2 = 0,03

Рис. 3. Динамика численности клиентской базы



c_1 =0,005; c_2 = 0,01; c_1 =0,015; c_2 = 0,03

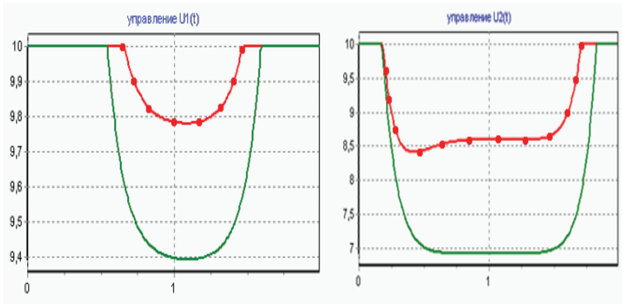
Рис. 4. Динамика темпа рекламной кампании

Анализ решения показывает, что при увеличении стоимости затрат на продвижение web-сайтов в три раза, прибыль от работы сайтов уменьшается на 10%, при этом клиентская база в конечный момент времени увеличивается на 6%.

Рассмотрим влияние коэффициента конкуренции на оптимальное решение задачи. Пусть параметры задачи имеют следующие значения: $x_1(0)=0{,}2$; $x_2(0)=0{,}5$; ρ_1 = 1,2; ρ_2 = 1,5; c_1 =0,01; c_2 = 0,03.

$\gamma_{12} = \gamma_{21}$ = 1; γ_{12} =0,5; γ_{21} = 0,1

Рис. 5. Динамика численности клиентской базы



$\gamma_{12} = \gamma_{21}$ = 1; γ_{12} =0,5; γ_{21} = 0,1

Рис. 6. Динамика темпа рекламной кампании

Из полученных графиков можно сделать вывод, что при уменьшении конкуренции общая прибыль от работы сайтов увеличивается. Клиентская база при высокой конкуренции уменьшается более чем на 10%.

Аналогичные численные исследования можно провести для различных параметров модели и рассмотреть всевозможные подходы и методики развития контента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная в статье математическая модель управления работой web-сайтов может быть полезна для исследования влияния параметров задачи на оптимальное решение, выявления закономерностей и числовых характеристик. Это в свою очередь даст возможность сформировать правильную бизнес-стратегию менеджмента Интернет – ресурса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Менаске, Д. Производительность web-служб. Анализ, оценка и планирование [Текст] / Менаске, Д., Алмейда В. – СПб: ООО «ДиасофтЮП», 2003. – 466 с.

2. Евдокимов Н. В. Основы контентной оптимизации: эффективная Интернет-коммерция и продвижение сайтов в Интернет [Текст] / Евдокимов Н. В. – М: «Вильямс», 2007. – 154 с.

3. Айзенберг Б. Тестирование и оптимизация веб-сайтов: руководство по Google Website optimizer [Текст] / Айзенберг Б., Кварто вон Тивадар Д., Дэвис Л.Т. – М: «Диалектика», 2009. – 329 с.

4. Андреева, Е.А. Вариационное исчисление и методы оптимизации [Текст] / Андреева Е.А., Цирулева В.М. – М: Высшая школа, 2006.– 583 с.

Андреева Елена Аркадьевна – доктор. физ-мат. наук, профессор, профессор кафедры компьютерной безопасности и математических методов управления, ФГБОУ ВО "Тверской *государственный университет", тел. (4822)585683, e-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru*

Суворов Владимир Иванович – к. физ-мат. наук, доцент, кафедра компьютерной безопасности и математических методов управления, ФГБОУ ВО "Тверской государственный университет"", тел. (4822)585683, .e-mail: vladimir.suvorov@mail.ru

Лобанов Александр Валентинович – ст. преподаватель кафедры компьютерной безопасности и математических методов управления, ФГБОУ ВО "Тверской государственный университет", тел. (4822)585683, e-mail: Lobanov.AV@tversumail.ru

MATHEMATICAL MODEL OF WEBSITE MANAGEMENT

E.A. Andreeva, V.I. Suvorov, A.V. Lobanov
Tver State University, Tver

The relevance of the study, given in the article, is conditioned by the arising technical and economic problems, particularly with the optimal infrastructure size determination from the information technology point of view for a site, which will be able to provide the proper quality of clients' requests service. The paper makes predictions in these sites operation in the case of their multiple load increase. The article considers the task of optimal control, which formalizes the client sites database management with the help of information throughput and speed increase of the site itself. The necessary conditions for the task optimality are formulated. Stability of found equilibrium positions is studied. Asymptotic stability conditions are found. Results of numerical experiments for operation of two sites and analysis of the obtained solution are given. This article is of practical value to website developers, administrators and analysts.

Index terms: mathematical model, website, channel capacity, optimal control, nonlinear system of differential equations.

REFERENCES

1. Menaske, D. and Almejda, V. Proizvoditel'nost' web-sluzhb. Analiz, ocenka i planirovanie, DiasoftYUP. , Russian Federation, 2003.
2. Evdokimov, N.V. Osnovy kontentnoj optimizacii. Effektivnaya In-ternet-kommerciya i prodvizhenie sajtov v Internet, Williams. Saint Petersburg, Russian Federation, 2007.
3. Eisenberg, B., Quarto von Tivadar, J. and Davis. L. T. Always Be Testing: The Complete Guide to Google Website Optimizer. Dialektika. Moscow, Russian Federation, 2009.
4. Andreeva, E.A. and Ciruleva, V.M. Variacionnoe ischislenie i metody optimizacii, Vysshaya shkola. Moscow, Russian Federation, 2006.

Elena A. Andreeva– Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor , Computer Security and Mathematical Methods of Control Department, Federal State Budget Educational Institution Of Higher Education "Tver State University", (4822)585683, e-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru.

Vladimir I. Suvorov – associate professor , Computer Security and Mathematical Methods of Control Department, Federal State Budget Educational Institution Of Higher Education "Tver State University", (4822)585683, e-mail: vladimir.suvorov@mail.ru.

Alexander V. Lobanov – senior teacher, Computer Security and Mathematical Methods of Control Department, Federal State Budget Educational Institution Of Higher Education "Tver State University", (4822)585683, e-mail: Lobanov.AV@tversumail.ru