

ТЕПЛООБМЕН И МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

С.В. Соловьев

Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск

Представлены результаты численного моделирования нестационарного теплообмена электропроводной жидкости (находящейся в сильном магнитном поле) в сферическом слое с учетом диссипации джоулевой теплоты и внутренних источников и стоков тепла при подводе тепла к нижней сфере.

Ключевые слова: математическое моделирование, нестационарный теплообмен, магнитная гидродинамика, внутренние источники и стоки тепла, диссипация джоулевой теплоты, сферический слой.

ВВЕДЕНИЕ

Данная проблема имеет место при исследовании фундаментальных задач геофизики, астрофизики, атомной энергетики и космической техники. В таких задачах имеется принципиальное отличие (в уравнении движения жидкости в приближении Буссинеска вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру / от центра сферического слоя) от широкого круга задач конвективного теплообмена в замкнутых объемах [1-9], в которых вектор силы тяжести направлен вертикально вниз. В работах [10-19] вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру / от центра сферического слоя. В работах [10, 12-17, 19] для температуры задавались граничные условия первого рода.

В работе [11] рассматривался стационарный режим при отводе тепла от внутренней поверхности слоя и постоянном значении температуры на внешней поверхности. Исследовалось влияние внутренних источников (стоков) тепла и диссипации джоулевой теплоты на теплообмен и гидродинамику электропроводной жидкости в сферическом слое ($Gr = 10^2$; $d/D = 1/2,5$; $Pr = 1$; $Re = 10$; $Re_m = 1$; $S/Re_m = 10^{-5}$; $Q_v = \pm 1$).

В работе [18] получены нестационарные результаты при подводе тепла к внутренней поверхности слоя и постоянном значении температуры на внешней поверхности ($Gr = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$; $Ho = 2$; $d/D = 1/1.5$; $S/Re_m = 10^{-5}$). Диссипация джоулевой теплоты не учитывалась.

В настоящей работе исследуется нестационарный теплообмен и магнитная гидродинамика электропроводной жидкости, находящейся в сферическом концентрическом слое, при подводе тепла к нижней поверхности сферического слоя. Учитывается диссипация джоулевой теплоты, выделяющаяся при течении электропроводной жидкости, и равномерно распределенные в жидкости внутренние объемные источники / стоки тепла.

Жидкость находится в сильном магнитном поле (число Гартманна $G = 10^3$). Вектор силы тяжести направлен по радиусу к центру сферического слоя.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Математическая постановка задачи в переменных вихрь ω , функция тока ψ , температура ϑ , магнитная индукция B в сферической системе координат с учетом симметрии по долготе имеет вид [18]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Ho} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{Gr}{Re^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \\ & + \frac{S}{Re_m} \left(B_r \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{B_r}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \right. \\ & - \frac{B_r}{r} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \\ & \left. \frac{2B_\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Ho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + Q_v \right) - \frac{J}{Pe} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right)^2 = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{Ho} \frac{\partial B_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \right.$$

$$+ \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big] + \frac{1}{Re_m} \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{ctg\theta}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{2B_r}{r^2} - \frac{2B_\theta ctg\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{Ho} \frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(-B_r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial B_r}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{ctg\theta}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right]. \quad (5)$$

Для температуры на внутренней поверхности слоя Γ_1 ($r = 1$) задавалось граничное условие второго рода (подвод тепла), а на внешней Γ_2 ($r = r_2$) первого рода:

$$-\frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1} = 1; \quad g \Big|_{\Gamma_2} = 0. \quad \text{На оси симметрии ставилось}$$

условие: $\frac{\partial g}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0$. Граничные условия для

функции тока, вихря и магнитной индукции имели следующий вид [10]:

$$\psi \Big|_{\Gamma_{1,2}} = \psi \Big|_{\theta=0,\pi} = \omega \Big|_{\theta=0,\pi} = 0; \quad \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0;$$

$$B_r \Big|_{\Gamma_1} = B_r \Big|_{\Gamma_2} = 0; \quad B_\theta \Big|_{\Gamma_1} = -0,01 \sin \theta; \quad B_\theta \Big|_{\Gamma_2} = 0,01 \sin \theta.$$

Граничные условия для вихря на границах слоя предполагают линейное изменение его по нормали. Локальные и осредненные числа Нуссельта на поверхности внутренней и наружной сферы рассчитывались по формулам:

$$Nu_1 = - \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1}, \quad Nu_2 = -r_2 \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{\Gamma_2}.$$

$$\overline{Nu_1} = - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{\Gamma_1} \right] \sin \theta d\theta, \quad \overline{Nu_2} = - \frac{r_2}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{\Gamma_2} \right] \sin \theta d\theta.$$

Обозначения величин, используемых при записи системы уравнений (1-5), приведены ниже.

$B = B' / B_0$, Ψ и ω – безразмерные магнитная индукция, функция тока и напряженность вихря; B' – размерная магнитная индукция; D_m – коэффициент магнитной вязкости (диффузии); r' , r'_1 , r'_2 – размерные текущий радиус, радиус внутренней и внешней сфер соответственно; $r = r' / r'_1$, $r_2 = r'_2 / r'_1$ – безразмерные текущий радиус и радиус внешней сферы; θ – угол широты; ν , a – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости; ρ_0 , u_0 , t_0 , B_0 – характерные масштабы; σ – электрическая проводимость жидкости;

$$Ho = \frac{u_0 t_0}{r'_1} - \text{число гомохронности}; \quad Gr = \frac{g \beta q r'_1{}^4}{\nu^2 \lambda};$$

$Re = \frac{u_0 r'_1}{\nu}$; $Pe = \frac{u_0 r'_1}{a}$ – числа Грасгофа, Рейнольдса и

Пекле; $Re_m = \frac{u_0 r'_1}{D_m}$ – магнитное число Рейнольдса;

$S = \frac{\sigma B_0^2 r'_1}{\rho_0 u_0}$ – параметр магнитного взаимодействия;

$g = \frac{(T-1)\lambda}{q r'_1}$ – безразмерная температура; $Q_v = q_v$

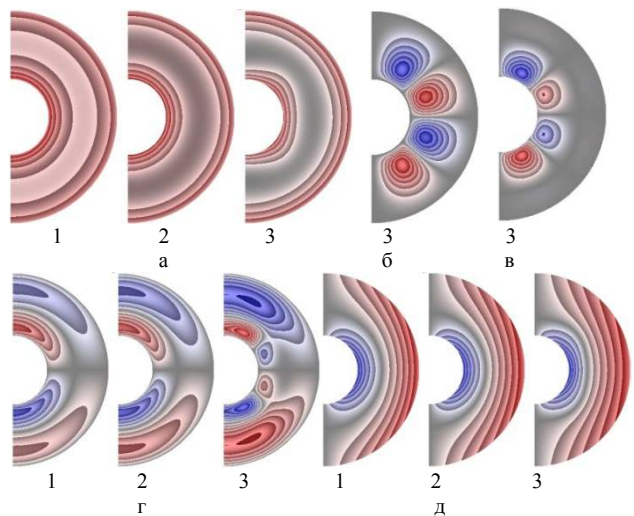
r'_1 / q . $J = \frac{D_m r'_1}{4\pi q}$; q – размерная плотность теплового

потока, которая подводится к внутренней поверхности сферического слоя.

Численное решение задачи осуществлялось методом конечных элементов. По времени применялась неявная разностная схема с шагом по времени $\Delta \tau = 0,1$. В начальный момент времени значения расчетных функций приняты равными нулю. Расчеты проводились при следующих значениях безразмерных чисел подобия: $d/D = 1/2,8$; $Gr = 10^4$; $Re = Pe = Re_m = 10^2$; $Pr = 1$; $S = 10^4$; $Ho = 10$. Значения критериев подобия были взяты из работ [10-19] с целью расширения круга задач [1, 10-19] и оценки влияния различных факторов (граничных условия для температуры, учет или не учет внутренних источников и стоков тепла, значений критериев подобия, толщины сферического слоя, диссипации джоулевой теплоты, направление вектора силы тяжести – от центра или к центру сферического слоя) на теплообмен и магнитную гидродинамику жидкости в сферическом слое.

На рис. 1-4 приведены результаты, полученные с учетом внутренних стоков тепла $Q_v = -1$.

На рис. 1 приведены результаты расчетов для моментов времени: 1 – $\tau = 2$; 2 – $\tau = 3$; 3 – $\tau = 5$.



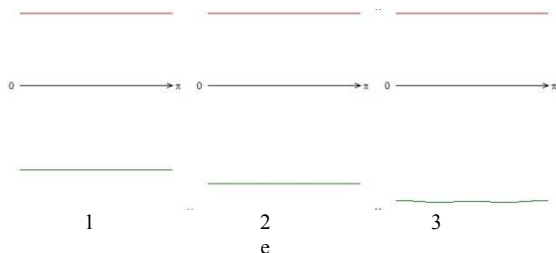


Рис. 1. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

Теплообмен в слое для $\tau = 2; 3$ осуществляется теплопроводностью (рис. 1а, 1, 2). Изотермы представляют собой концентрические окружности. С течением времени ($\tau = 5$) в слое жидкости начинает развиваться конвективный механизм теплообмена, изотермы вблизи внутренней поверхности сферического слоя жидкости искривляются (рис. 1а, 3). Температура жидкости для $\tau = 2; 3; 5$ изменяется в интервале:

$$1 - [-1,622; 1,724]; 2 - [-2,129; 1,319];$$

3 - $[-2,976; 0,563]$. На рис. 1е приведены распределения чисел Нуссельта (на внутренней поверхности – красная линия, на внешней – зеленая). Для заданного граничного условия для температуры на внутренней поверхности слоя числа Нуссельта равны 10. Числа Нуссельта на внешней поверхности слоя и максимальная температура для $\tau = 2; 3; 5$ принимают следующие значения:

$$1 - \overline{Nu}_2 = Nu_2 = -11,634;$$

$$2 - \overline{Nu}_2 = -13,590; -13,590 \leq Nu_2 \leq -13,589;$$

$$3 - \overline{Nu}_2 = -16,038; -16,112 \leq Nu_2 \leq -15,846.$$

Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней. Для $\tau = 2; 3$ поля функции тока и вихря еще не сформировались. С течением времени ($\tau = 5$) в слое зарождаются четыре конвективные ячейки и четыре вихря (рис. 1б, в, 3). Синий цвет (отрицательные значения) означает, что жидкость движется по часовой стрелке. Красный цвет (положительные значения) означает, что жидкость движется против часовой стрелки. Знаки величин функции тока и вихря (от северного полюса к южному) изменяются в следующей последовательности: “-”, “+”, “-”, “+”.

Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 8,70 \cdot 10^{-3}$; $|\omega_{max}| = 2,86 \cdot 10^{-1}$. Поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции приведены на рис. 1г, д соответственно. Для $\tau = 2; 3$ поле радиальной составляющей магнитной индукции практически не изменяется. С течением времени (рис. 1г, 3), в отличие от результатов, приведенных на рис. 1г, 1; 2, в области экватора образуются две (отрицательная и положительная) мелкомасштабные “магнитные ячейки”. Значения радиальной составляющей магнитной индукции северного полушария положительные у внутренней

поверхности слоя и отрицательные у внешней (рис. 1г, 1, 2). В южном полушарии тенденция противоположная. На рис. 1д приведено поле меридиональной составляющей магнитной индукции. Значения меридиональной составляющей положительные у внешней поверхности слоя и отрицательные у внутренней. С течением времени кривизна изолиний меридиональной составляющей магнитной индукции увеличивается (рис. 1д, 2, 3). Максимальные значения радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции: $|B_{rmax}| = 7,49 \cdot 10^{-4}$; $|B_{\theta max}| = 10^{-2}$.

На рис. 2 приведены результаты расчетов для моментов времени: 1 – $\tau = 7$; 2 – $\tau = 8$; 3 – $\tau = 10$.

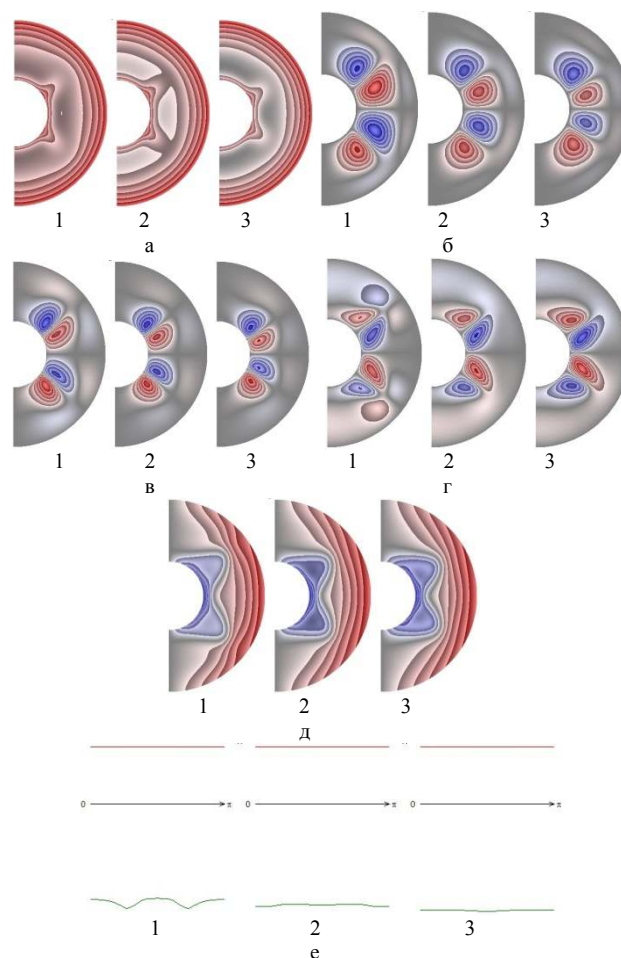


Рис. 2. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

Для $\tau = 7$ теплообмен в слое жидкости осуществляется конвекцией малой интенсивности (рис. 2е, 1), которая с течением времени изменяется на теплопроводность (рис. 2е, 2, 3). Температура жидкости для $\tau = 7; 8; 10$ изменяется в интервале: 1 – $[-3,547; 0]$; 2 – $[-3,805; 0]$; 3 – $[-4,256; 0]$. Числа Нуссельта (рис. 2е) на внешней поверхности слоя принимают следующие значения:

- 1 – $\overline{Nu}_2 = -17,206; -18,245 \leq Nu_2 \leq -16,500;$
- 2 – $\overline{Nu}_2 = -17,654; -17,971 \leq Nu_2 \leq -17,542;$
- 3 – $\overline{Nu}_2 = -18,626; -18,792 \leq Nu_2 \leq -18,498.$

В слое образуются четыре конвективные ячейки и четыре вихря (рис. 2б, в), масштаб которых уменьшается с течением времени. Гидродинамическая структура жидкости в слое аналогична результату, приведенному на рис. 1б, в, 3. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 3,97 \cdot 10^{-2}; |\omega_{max}| = 8,69 \cdot 10^{-1}$. С течением времени поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (рис. 2г, д) претерпевают значительные изменения по сравнению с результатами, приведенными на рис. 1г, д. В поле радиальной составляющей сначала образуются шесть “магнитных ячеек” (рис. 2г, 1), а затем четыре (рис. 2г, 2, 3). Знаки величин “магнитных ячеек” радиальной составляющей (от северного полюса к южному) изменяются в последовательности “+”, “-”, “+”, “-” (рис. 2г, 2, 3). С областью отрицательных значений поля меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 2д) происходят значительные изменения по сравнению с результатом, приведенным на рис. 1д. Максимальные значения радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции: $|B_{rmax}| = 5,25 \cdot 10^{-3}; |B_{\theta max}| = 10^{-2}$.

На рис. 3 приведены результаты расчетов для следующих моментов времени: 1 – $\tau = 12;$ 2 – $\tau = 15;$ 3 – $\tau = 20.$

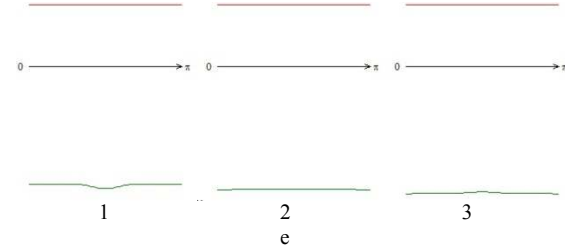
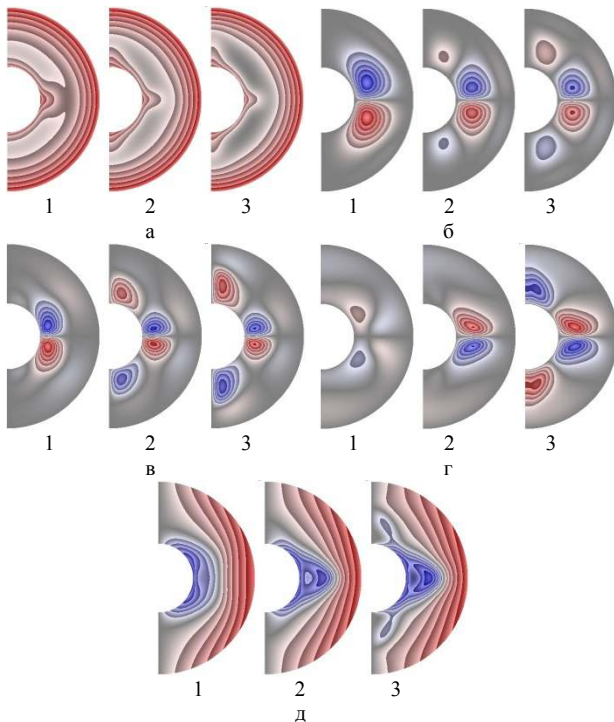


Рис. 3. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

Теплообмен в слое жидкости осуществляется теплопроводностью (рис. 3е). Изотермы поля температуры (рис. 3а) изменяются по сравнению с результатами рис. 2а. Температура жидкости для $\tau = 12; 15; 20$ изменяется в интервале: 1 – $[-4,556; 0];$ 2 – $[-4,827; 0];$ 3 – $[-5,089; 0].$ Числа Нуссельта на внешней поверхности слоя принимают следующие значения:

- 1 – $\overline{Nu}_2 = -19,336; -19,823 \leq Nu_2 \leq -19,074;$
- 2 – $\overline{Nu}_2 = -19,966; -20,076 \leq Nu_2 \leq -19,934;$
- 3 – $\overline{Nu}_2 = -20,543; -20,720 \leq Nu_2 \leq -20,371 .$

Для $\tau = 12$ в слое образуются две конвективные ячейки и два вихря (рис. 3б, в, 1), значения которых в северном полушарии отрицательные, а в южном – положительные. С течением времени (рис. 3б, в, 2, 3) в слое образуются четыре конвективные ячейки и четыре вихря. Направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях (рис. 3б, в, 3) изменяется на противоположное по сравнению с результатами, приведенными на рис. 3б, в, 1 и рис. 2б, в. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 4,94 \cdot 10^{-2}; |\omega_{max}| = 7,89 \cdot 10^{-1}$. С течением времени поля радиальной и меридиональной составляющих магнитной индукции (рис. 3г, д) претерпевают значительные изменения по сравнению с результатами, приведенными на рис. 2г, д. Для $\tau = 12$ в поле радиальной составляющей магнитной индукции образуются две мелкомасштабные “магнитные ячейки” (рис. 3г, 1), масштаб которых с течением времени увеличивается (рис. 3г, 2). При $\tau = 20$ количество “магнитных ячеек” увеличивается до четырех (рис. 3г, 3). Максимальное значение радиальной составляющей магнитной индукции $|B_{rmax}| = 8,71 \cdot 10^{-3}$. Область отрицательных значений меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 3д) трансформируется по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2д. Максимальное значение меридиональной составляющей магнитной индукции $|B_{\theta max}| = 10^{-2}$.

На рис. 4 приведены результаты расчетов для моментов времени: 1 – $\tau = 25;$ 2 – $\tau = 30;$ 3 – $\tau = 35.$

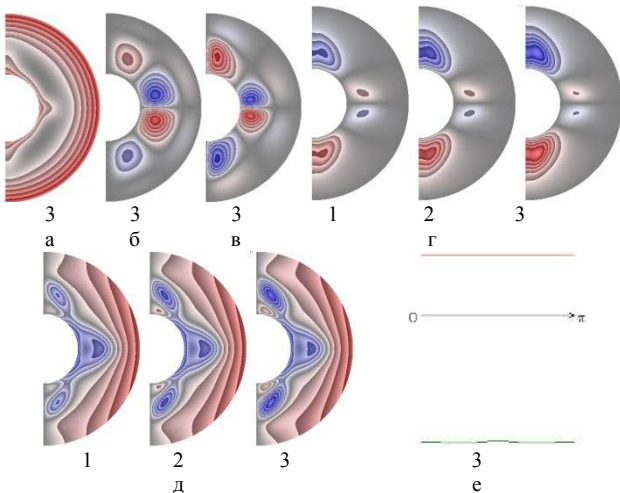


Рис. 4. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

Оказалось, что поле температуры и гидродинамическая структура течения жидкости в слое достигли своего стационарного состояния (незначительные количественные изменения поля магнитной индукции никоим образом не влияют на это состояние). Сравнивая результаты, приведенные на рис. 4, с результатами, представленными на рис. 3 ($\tau = 20$), можно отметить, что они качественно похожие. Теплообмен в слое жидкости осуществляется теплопроводностью (рис. 4а, е, 3). Температура жидкости для $\tau = 25; 30; 35$ изменяется в интервале: 1 – $[-5,207; 0]$; 2 – $[-5,262; 0]$; 3 – $[-5,286; 0]$. Числа Нуссельта на внешней поверхности принимают следующие значения:

$$1 - \overline{Nu}_2 = -20,802; -20,884 \leq Nu_2 \leq -20,625;$$

$$2 - \overline{Nu}_2 = -20,918; -21,000 \leq Nu_2 \leq -20,715;$$

$$3 - \overline{Nu}_2 = -20,969; -21,073 \leq Nu_2 \leq -20,782.$$

В слое жидкости образуются четыре конвективные ячейки и четыре вихря (рис. 4б, в, 3). Знаки величин функции тока в конвективных ячейках и вихрей (от северного полюса к южному) изменяются в последовательности “+”, “-”, “+”, “-”. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 3,38 \cdot 10^{-2}$; $|\omega_{max}| = 6,74 \cdot 10^{-1}$. В поле радиальной составляющей магнитной индукции в области полюсов зарождаются две крупномасштабные, а в области экватора две мелкомасштабные “магнитные ячейки”, (рис. 4г). Знаки величин “магнитных ячеек” радиальной составляющей (от северного полюса к южному) изменяются в последовательности “-”, “+”, “-”, “+”. Максимальное значение радиальной составляющей магнитной индукции $|B_{rmax}| = 3,06 \cdot 10^{-2}$. В поле меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 4д) зона отрицательных значений увеличивается и трансформируется по сравнению с результатами, приведенными на рис. 3д. Значения

меридиональной составляющей магнитной индукции находятся в интервале

$$|B_\theta| \in [-1, 10 \cdot 10^{-2}; 10^{-2}].$$

Для оценки влияния положительных внутренних источников тепла был проведен вычислительный эксперимент с $Q_v = +1$. На рис. 5-8 приведены результаты этого эксперимента.

На рис. 5 приведены результаты для времени: 1 – $\tau = 2$; 2 – $\tau = 3$; 3 – $\tau = 5$.

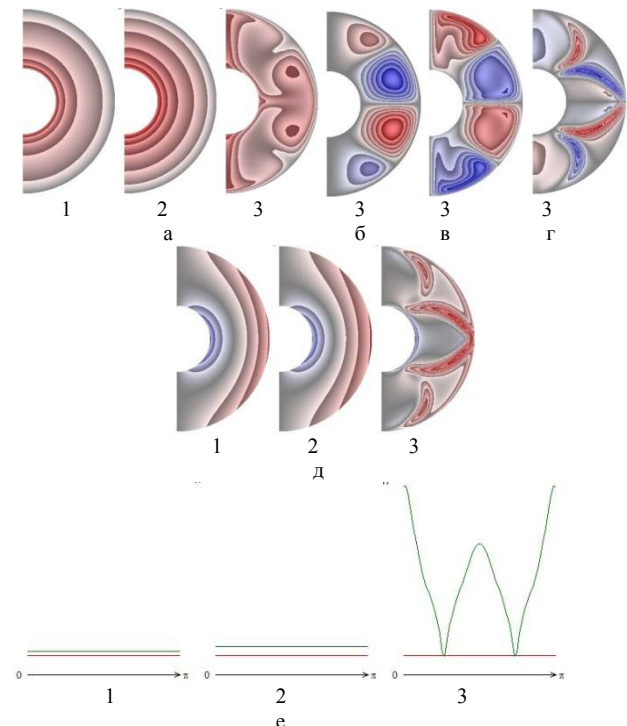


Рис. 5. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

Для $\tau = 2; 3$ теплообмен в слое жидкости осуществляется теплопроводностью (рис. 5а, 1, 2 и рис. 5е, 1, 2), но уже при $\tau = 5$ возникает конвекция (рис. 5а, 3), в отличие от результата, приведенного на рис. 1а, 3 ($Q_v = -1$). Максимальная температура жидкости $\mathcal{G}_{max} = 7,192$. Распределение чисел Нуссельта для $\tau = 5$ (рис. 5е, 3) на внешней поверхности слоя имеет два минимума и один максимум. Значения чисел Нуссельта следующие:

$$1 - \overline{Nu}_2 = 11,844; 11,843 \leq Nu_2 \leq 11,846;$$

$$2 - \overline{Nu}_2 = 14,313; 14,300 \leq Nu_2 \leq 14,372;$$

$$3 - \overline{Nu}_2 = 43,490; 9,504 \leq Nu_2 \leq 95,770.$$

Теплообмен на внешней поверхности слоя интенсивнее, чем на внутренней поверхности. Для $\tau = 2; 3$ поля функции тока, вихря, радиальной составляющей магнитной индукции еще не сформировались. При $\tau = 5$ в слое жидкости образуются четыре конвективные ячейки и четыре

вихря (рис. 5б, в, 3), форма которых отлична от результата, приведенного на рис. 1б, в, 3. Направление движения жидкости в конвективных ячейках и вихрях (рис. 5б, в, 3) изменяется на противоположное (рис. 1б, в, 3; $Q_v = -1$). Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 4,61 \cdot 10^{-1}$; $|\omega_{max}| = 2,36$. Поля магнитной индукции (рис. 5г, д) значительно отличаются от аналогичных полей, приведенных на рис. 1г, д. Максимальные значения составляющих магнитной индукции: $|B_{rmax}| = 1,58 \cdot 10^{-2}$; $|B_{\theta max}| = 10^{-2}$.

На рис. 6 приведены результаты для времени: 1 – $\tau = 7$; 2 – $\tau = 8$; 3 – $\tau = 10$.

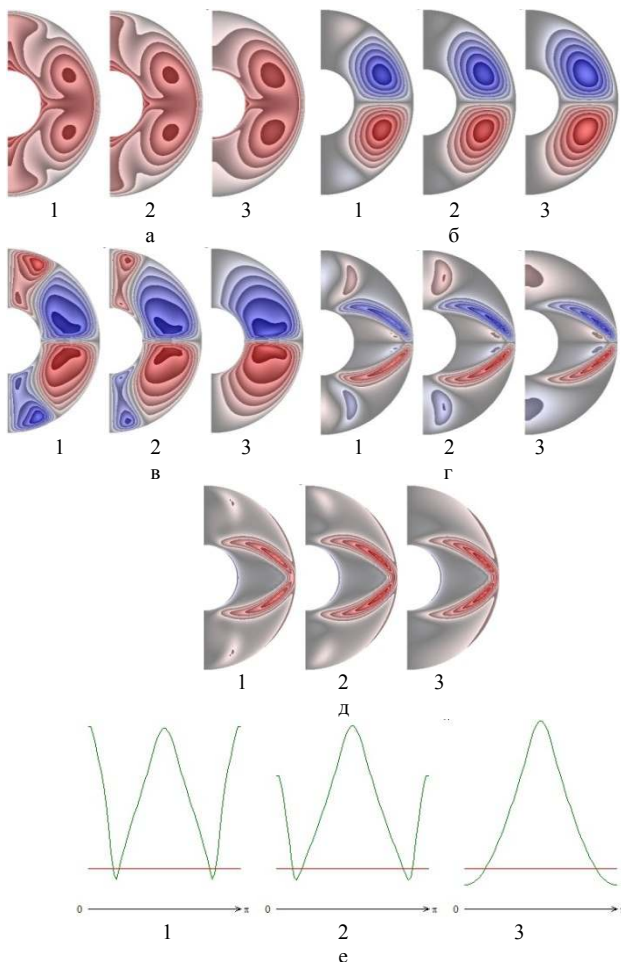


Рис. 6. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

С течением времени в слое жидкости (рис. 6) происходят значительные изменения по сравнению с результатами, представленными на рис. 5. Для рассмотренных моментов времени теплообмен осуществляется конвекцией. Поле температуры напоминает “ушную раковину” с двумя кавернами (рис. 6а). $Sh_{max} = 4,780$. Распределение чисел Нуссельта для $\tau = 7$; 8 (рис. 6е, 1, 2) на внешней поверхности

слоя имеет два минимума и один максимум, а для $\tau = 10$ – один максимум (рис. 6е, 3).

Значения чисел Нуссельта следующие:

$$1 - \overline{Nu}_2 = 28,385; 7,330 \leq Nu_2 \leq 44,834;$$

$$2 - \overline{Nu}_2 = 27,407; 7,032 \leq Nu_2 \leq 44,880;$$

$$3 - \overline{Nu}_2 = 27,843; 6,035 \leq Nu_2 \leq 46,150.$$

В поле функции тока образуются две крупномасштабные конвективные ячейки (рис. 6б). В ячейке северного полушария жидкость движется по часовой стрелке, а южного – против. Для $\tau = 7$; 8 в слое образуются четыре вихря: два мелкомасштабных в области полюсов и два крупномасштабных в основной области течения (рис. 6в, 1, 2). При $\tau = 10$ происходит объединение вихрей в каждом полушарии с образованием двух крупномасштабных вихрей практически во всей области течения (рис. 6в, 3). В вихре северного полушария жидкость движется по часовой стрелке, а южного – против (рис. 6в, 3). Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 4,55 \cdot 10^{-1}$; $|\omega_{max}| = 1,47$. Поле радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 6г) с течением времени претерпевает небольшие изменения. $|B_{rmax}| = 2,80 \cdot 10^{-2}$. Поле меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 6д) практически не изменяется со временем. Значения меридиональной составляющей магнитной индукции находятся в интервале $|B_{\theta}| \in [-10^{-2}; 3,89 \cdot 10^{-2}]$. Сравнивая результаты, приведенные на рис. 6 и 2, можно отметить, что учет источников тепла $Q_v = +1$ (рис. 6) приводит к значительным изменениям результатов, полученных при учете стоков тепла $Q_v = -1$ (рис. 2).

На рис. 7 приведены результаты для моментов времени: 1 – $\tau = 12$; 2 – $\tau = 15$; 3 – $\tau = 20$.

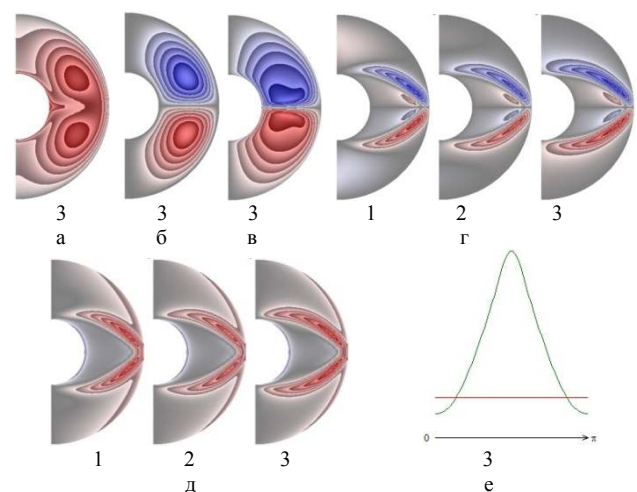


Рис. 7. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

Сравнивая полученные результаты с результатами рис. 6 при $\tau = 10$, можно отметить, что они качественно похожие. Имеют место небольшие количественные различия. Значения расчетных величин (рис. 7) следующие: $g_{max} = 3,923$; $|\Psi_{max}| = 4,70 \cdot 10^{-1}$; $|\omega_{max}| = 1,49$; $|B_{rmax}| = 2,06 \cdot 10^{-2}$; $|B_{\theta max}| = 2,94 \cdot 10^{-2}$;

$$1 - \overline{Nu}_2 = 28,218; 5,967 \leq Nu_2 \leq 46,550;$$

$$2 - \overline{Nu}_2 = 28,389; 5,954 \leq Nu_2 \leq 46,763;$$

$$3 - \overline{Nu}_2 = 28,430; 5,950 \leq Nu_2 \leq 46,811.$$

Сравнение результатов, приведенных на рис. 7 и 3, показывает значительное влияние источников и стоков тепла на теплообмен и магнитную гидродинамику электропроводной жидкости в сферическом слое.

Были проведены расчеты для моментов времени: 1 – $\tau = 25$; 2 – $\tau = 30$; 3 – $\tau = 35$.

Оказалось, что для данного интервала времени полученные результаты практически не изменяются во времени. В этой связи на рис. 8 приведены результаты, полученные для момента времени $\tau = 35$.

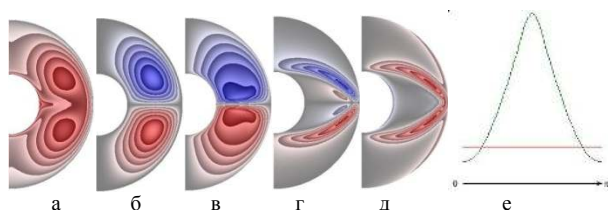


Рис. 8. Поля температуры (а), функции тока (б), вихря (в), радиальной (г) и меридиональной (д) составляющих магнитной индукции, распределение чисел Нуссельта (е)

Сравнение полученных результатов (рис. 8) с результатами, приведенными на рис. 7 для $\tau = 20$, показало, что при $\tau = 35$ наступает стационарный режим. Теплообмен в слое жидкости осуществляется конвекцией. В поле температуры образуются две каверны (рис. 8а). Максимальная температура жидкости $g_{max} = 3,918$. Распределение чисел Нуссельта (рис. 8е) на внешней поверхности слоя имеет один максимум. Значения чисел Нуссельта следующие: $\overline{Nu}_2 = 28,437$; $5,949 \leq Nu_2 \leq 46,820$. В слое жидкости образуются две крупномасштабные конвективные ячейки и два вихря (рис. 8б, в). В конвективной ячейке и вихре северного полушария жидкость движется по часовой стрелке, а южного – против часовой стрелки. Максимальные значения функции тока и вихря: $|\Psi_{max}| = 4,70 \cdot 10^{-1}$; $|\omega_{max}| = 1,49$. В поле радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 8г) образуются две “магнитные ячейки” дугообразной формы: отрицательная в северном полушарии и положительная в южном полушарии. Максимальное значение радиальной составляющей

магнитной индукции $|B_{rmax}| = 2,32 \cdot 10^{-2}$. В поле меридиональной составляющей магнитной индукции (рис. 8д) образуются две положительные “магнитные ячейки” дугообразной формы. Значения меридиональной составляющей магнитной индукции находятся в интервале $|B_{\theta}| \in [-10^{-2}; 3,28 \cdot 10^{-2}]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Для рассмотренных моментов времени при учете стоков тепла ($Q_v = -1$) теплообмен в слое жидкости осуществляется теплопроводностью. Теплообмен на внутренней поверхности слоя интенсивнее, чем на внешней поверхности;

2. Для рассмотренных моментов времени при учете источников тепла ($Q_v = +1$) теплообмен в слое жидкости осуществляется конвекцией. Теплообмен на внешней поверхности слоя интенсивнее, чем на внутренней поверхности;

3. Для соответствующих моментов времени все расчетные поля при $Q_v = -1$ и $Q_v = +1$ имеют значительные различия: в механизме теплообмена (теплопроводность и конвекция); в форме и количестве конвективных ячеек и вихрей, а также в направлении движения жидкости в них; в поле магнитной индукции; в распределении чисел Нуссельта на внешней поверхности сферического слоя жидкости;

4. При $Q_v = +1$ распределения локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней поверхности сферического слоя имеют точки пересечения. В этих точках имеет место равенство тепловых потоков на внутренней и внешней поверхностях сферического слоя;

5. Оказалось, что для полученных результатов и заданных значений безразмерных критериев подобия стационарное состояние наступает при достижении времени $\tau = 35$ как при учете отрицательных стоков тепла $Q_v = -1$, так и при учете положительных источников тепла $Q_v = +1$;

6. Полученные результаты позволяют оценить эволюцию теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости в сферическом концентрическом слое при подводе тепла к нижней сфере с учетом внутренних источников и стоков тепла, а также определить время наступления стационарного режима.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, Хабаровского отделения регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований» (дополнительное соглашение № 075-02-2020-1529/1 от 21 апреля 2020 г.).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мартыненко О.Г. Свободно-конвективный теплообмен. Справочник / О.Г. Мартыненко, Ю.А. Соковишин. – Минск: Наука и техника, 1982. – 400 с.
2. Вебер Н., Поу Р., Бишоп Е., Скэнлэн Д. Теплоотдача свободной конвекцией в замкнутых сферических контейнерах // Труды американского общества инженеров - механиков, серия Теплопередача. – 1975. – № 4. – С. 27.
3. Chow M.Y., Akins R.G. Pseudo steady state natural convection inside spheres // Trans. ASME, J. Heat Transfer. – 1975. – Vol. 97 C. – №. 1. – P. 54–59.
4. Mc Bain G.D. Convection in a horizontally heated sphere // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 438. – P. 1–10.
5. Mochimaru Yo. Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity // Heat Transfer Jap. Res. 1989. Vol. 18. №. 4. P. 9–19.
6. Whitley H.G., Vachon R.I. Transient laminar free convection in closed spherical containers // J. Heat Transfer, Trans ASME, series C. – 1972. – Vol. 94. – P. 360–366.
7. Рязских В.И., Слюсарев М.И., Зайцев В.А. Анализ свободной термоконвекции в сферических резервуарах при граничных условиях второго рода // Вестник ВГТУ. Сер. Энергетика. – 2004. – Вып. 7.4. – С. 5–10.
8. Hutchins J., Marschall E. Pseudosteady-state natural convection heat transfer inside spheres // In. J. of Heat and Mass Transfer. – 1989. – Vol. 32. – №. 11. – P. 2047–2053.
9. Рязских В.И., Рязских В.И., Слюсарев М. И., Богер А. А., Зайцев В. А. Синтез математической модели естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в сферической емкости // Вестник ВГТУ. Сер. Энергетика. – 2003. – Вып. 7.3. – С. 14–17.
10. Solov'ev S. V. Influence of joule dissipation on heat exchange and magnetic hydrodynamics of liquid in a spherical layer. Part I // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2017. – № 5. – P. 1251-1265.
11. Соловьев С. В. Моделирование теплообмена жидкости в сферическом слое при отводе тепла снизу // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2018. – № 1(48). – С. 23-32.
12. Соловьев С. В. Моделирование нестационарного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое. Часть I // Южно-Сибирский научный вестник. – 2018. – № 3 (23). – С. 54-59.
13. Соловьев С. В., Глазкова Е. А. Моделирование нестационарного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое. Часть II // Южно-Сибирский научный вестник. – 2018. – № 4. – С. 73-78.
14. Соловьев С. В. Влияние числа гомохронности на теплообмен электропроводной жидкости в сферическом слое // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2018. – №4 (51). – С. 57-66.
15. Соловьев С. В. Моделирование конвективного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92. – № 1. – С. 188-201.
16. Solov'ev S. V. Simulation of the convective heat exchange in the spherical layer of an electrically conducting liquid // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2019. – Vol. 92. – № 1. – P. 183-195.
17. Соловьев С. В., Чернышев А. В. Моделирование теплообмена жидкости в сферическом слое // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 1. – С. 114-122.
18. Соловьев С. В. Теплообмен жидкости в сферическом слое при нагреве снизу // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2019. – № 1(52). – С. 35-44.
19. Соловьев С. В. Исследование нестационарного теплообмена электропроводной жидкости в сферическом слое // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер.: Физико-математические науки. – 2018. – № 4(48). – С. 20-32.

Соловьев Сергей Викторович – д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики Тихоокеанского государственного

HEAT EXCHANGE AND MAGNETIC HYDRODYNAMICS ELECTRIC CONDUCTIVE LIQUID IN A SPHERICAL LAYER

S.V. Solovev

Pacific national university, Khabarovsk

Abstract –The results of numerical simulation of unsteady heat transfer of an electrically conductive liquid (located in a strong magnetic field) in a spherical layer are presented taking into account the dissipation of Joule heat and internal sources and heat sinks when heat is applied to the lower sphere.

Index terms: mathematical modeling, non-stationary heat transfer, magnetic hydrodynamics, internal heat sources and sinks, dissipation of Joule heat, spherical layer.

REFERENCES

1. Marty'nenko O.G., Sokovishin Yu. A. Svobodno-kjnvektivny'j teploobmen. Spravochnik. Minsk: Nauka i tekhnika, 400 p. 1982.
2. Veber H., Pou R., Bishop E., Ske'nl'e'n D. "Teplootdacha svobodnoj konvekcij v zamknuty'h sfericheskikh kontejnirah," Trudy' amerikanskogo obshhestva inzhenerov-mehaničkov, seriya Teploperedacha. no. 4, p. 27, 1975.
3. Chow M.Y., Akins R.G. "Pseudo steady state natural convection inside spheres," Trans. ASME, J. Heat Transfer. vol. 97 C, no. 1, pp. 54-59, 1975.
4. Mc Bain G.D. "Convection in a horizontally heated sphere," J. Fluid Mech., vol. 438, pp. 1-10, 2001.
5. Mochimary Yo. "Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity," Heat Transfer Jap. Res. vol. 18, no. 4, pp. 9-19, 1989.
6. Whitley H.G., Vachon R.I. "Transient laminar free convection in closed spherical containers," J. Heat Transfer, Trans ASME, series C. vol. 94, pp. 360-366, 1972.
7. Ryazhskih V.I., Slyusarev M.I., Zajcev V.A. "Analiz svobodnoj termokonvekcii v sfericheskikh rezervuarah pri granichny'h usloviyah vtorogo roda," Vestnik VGTU. Ser. E'nergetika. vy'p. 7.4, pp. 5-10, 2004.
8. Hutchins J., Marschall E. "Pseudosteady-state natural convection heat transfer inside spheres," In. J. of Heat and Mass Transfer. vol. 32, no. 11, pp. 2047-2053, 1989.
9. Ryazhskih V.I., Slyusarev M.I., Boger A.A., Zajcev V.A. "Sintez matematicheskoj modeli estesvennoj konvekcii vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti v sfericheskoi emkosti," Vestnik VGTU. Ser. E'nergetika. vy'p. 7.3, pp. 14-17, 2003.
10. Solov'ev S. V. "Influence of joule dissipation on heat exchange and magnetic hydrodynamics of liquid in a spherical layer. Part I," Journal of Engineering Physics and Thermophysics, no. 5, pp. 1251-1265, 2017.
11. Solov'ev S. V. "Modeling of heat exchange of liquid in a spherical layer when removing heat from below," Vestnik Tixookeanskogo gosudarstvennogo universiteta, no. 1(48), pp. 23-32, 2018.
12. Solov'ev S. V. "Simulation of non-stationary heat exchange of electrically conductive fluid in a spherical layer. Part I," Yuzhno-sibirskij nauchny'j vestnik, no. 3 (23), pp.54-59, 2018.
13. Solov'ev S. V., Glazkova E.A. "Simulation of non-stationary heat exchange of electro-conductive liquid in a spherical layer. Part II," Yuzhno-sibirskij nauchny'j vestnik, no. 4, pp. 73-78, 2018.
14. Solov'ev S. V. "The influence of the homochronicity number on the heat transfer of an electrically conducting fluid in a spherical layer," Vestnik Tixookeanskogo gosudarstvennogo universiteta, no.4 (51), pp.57-66, 2018.
15. Solov'ev S. V. "Simulation of convective heat transfer of an electrically conducting fluid in a spherical layer," Journal of Engineering Physics and Thermophysics, vol. 92. no. 1, pp.188-201, 2019.
16. Solov'ev S. V. "Simulation of the convective heat exchange in the spherical layer of an electrically conducting liquid," Journal of Engineering Physics and Thermophysics, vol. 92. no. 1, pp. 183-195, 2019.
17. Solov'ev S. V., Chernyshev A.V. "Simulation of heat transfer in a spherical layer," Yuzhno-sibirskij nauchny'j vestnik, no.1, pp.114-122, 2019.
18. Solov'ev S. V. "Heat transfer in a spherical layer when heated from the bottom," Vestnik Tixookeanskogo gosudarstvennogo universiteta, no. 1(52), pp. 35-44, 2019.
19. Solov'ev S. V. "Study of non-stationary heat exchange of electrically conducting fluid in a spherical layer," Proceedings of higher educational institutions. Volga region. Ser. : Physics and Mathematics, no. 4(48), pp. 20-32, 2018.

Solovev Sergey Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Pacific State University, Khabarovsk, tel. (4212) 375188, e-mail: solovjovsv@rambler.ru.