05.13.18

ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ В МЕДИЦИНЕ

Ф.Х. Кудаева[1], А.А. Кайгермазов[1], Д.А. Хашхожева[1], А.Х. Жемухов[2], С.Б. Балкарова[1], М.Б. Этезова[1]

[1]*«Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», г.Нальчик*

[2] *«ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В.М. Кокова», г.Нальчик*

Аннотация. В последние годы низкотемпературный метод деструкции различных патологических образований находит широкое применение в медицине. Достигнутые результаты в области криобиологии и аппаратурного обеспечения метода, позволили образовать новую область медицины – криохирургию, который стал важным клиническим методом лечения. Криохирургия считается точным и управляемым процессом, хотя полное решение её тепловых аспектов не получено до настоящего времени. В связи с этим, наряду с экспериментальными исследованиями, весьма актуальным является математическое моделирование тепловых процессов замораживания биологической ткани, требующее разработки эффективных методов решения наиболее сложных задач математической физики - задач типа Стефана. Предлагаемая работа посвящена исследованию одномерной задачи со свободными границами средствами информационных технологий. Цель работы: применение информационно-коммуникационных технологий при исследовании одномерной задачи со свободными границами. В работе применяются методы интегральных и дифференциальных уравнений. В работе найдено точное аналитическое решение стационарной задачи. Используя информационные технологии, в работе построены графики зависимости температурного поля от времени в случае управляяемой криодеструкции и процесс замораживания биологической ткани. Методом эквивалентной линеаризации получено приближенное решение нестационарной задачи. Полученные в работе результаты могут быть применены к расчету режимов низкотемпературного воздействия на биологическую ткань, определению значения параметров замораживания, а также при конструировании и совершенствовании криоинструментов. В теоретическом плане для решения задач остаются актуальными вопросы существования, единственности, монотонности и пространственной локализации решений. В плане приложений здесь важны приближенных аналитические и численно-аналитические методы их решения.

Ключевые слова: *информационно-коммуникационные технологии, задача со свободными границами, стационарная задача, , управляемая криодеструкция, математическое моделирование*.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время внедрение информационно-коммуникационных технологий в науку и образование привело к росту прикладных исследований во многих областях, в том числе и для исследования задач со свободными границами в проблемах медицины. Имеется многочисленное число публикаций, где в исследованиях авторы пользуются численными методами. [2,3] По этим методам, чтобы получить результаты в работах авторы реализуют программы на различных языках программирования алгоритмы получения решений. По составленным программам проведены численные расчеты с различными данными.

Работа Окулова Н.А. [9] посвящена применению численного метода для решения одномерных задач типа Стефана. В работе Йоханссон Б.Т., Чапко Р. [3] для решения задачи Коши используется численный метод. Работа С.Л.Бородина «Численные методы решения задачи Стефана» содержит наиболее известные численные методы решения задачи Стефана с целью выбора наиболее эффективного из них. [2]

Цель настоящей работы: исследование одномерной нестационарной задачи со свободными границами, описывающей процесс криодеструкции с применением информационно-коммуникационных технологий.

В настоящей работе развит также метод эквивалентной линеаризации, в основу которых положены интегральные тождества и точные решения соответствующих стационарных задач со свободными границами. [1, 4-8]

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая модель процесса криодеструкции представляется следующей задачей со свободными границами[1,2]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+W(u)=c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t}-$$
$$-p\frac{dz^*}{dt}\delta\left(z-z^*\right),\quad z_0<z<\infty\,,\quad t>0\,,\ (1)$$
$$u(z,0)=u_T\,,\quad \lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}-\alpha\left(u-u_A\right)=0\,,$$
$$z=z_0\,,\quad \lim_{z\to\infty}u(z,t)=0,\quad u(z^*,t)=u^*,$$

где $W(u)=W_0(u_T-u_K)$, z^* - максимальный размер замороженной области биологической ткани, достигаемый в стационарном состоянии, U_A= $U_A(t)$ температура охлаждающей поверхности криозонда, α - коэффициентом теплообмена /термическое сопротивление, c(u) – теплоемкость биоткани, $\rho(u)$ - плотность биоткани, z_0 - начальная температура биоткани, u* - температура замораживания, $\lambda(u)$ - коэффициент теплопроводности. Порождаемое температурное поле u зависит от одной декартовой координаты z и времени t .

Переходя к безразмерным величинам и параметрам задача (1) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-W\beta(\theta)=\mathrm{K}(\theta)-$$
$$-P\frac{dx^*}{d\tau}\delta\left(x-x^*\right),\quad 0<x<\infty,\quad \tau>0,\qquad (2)$$
$$\theta(x,0)=0,\quad \gamma\frac{\partial\theta}{\partial x}=\tilde{h}(\theta-\theta_A),\quad x=0,\ \tau>0,$$
$$\left(\tilde{h}=\gamma h\right),\quad \lim_{x\to\infty}\theta(x,\tau)=0,\quad \theta(x,\tau)=\theta^*.$$

В (2) $\beta(\theta)=\theta\,\eta\left(\theta-\theta^*\right),\ \eta(\theta)$ - функция Хевисайда.

Если $\theta_A(\tau)\to -1$ при $\tau\to\infty$, то устанавливается стационарное температурное поле, определяемое как решение стационарной задачи, которое имеет вид:

$$\theta(x)=\begin{cases}\theta^*+h(\theta+1)(x-1), & 0<x\le 1\\ \theta^*\exp\left((1-x)\sqrt{\left(W/\gamma\right)}\right), & 1\le x<\infty\end{cases}\qquad (3)$$

Постоянные θ_-, W и h связаны соотношениями:

$$\Theta_-=\Theta^*-h(1+\Theta_-),\quad \Theta^*\sqrt{W\lambda}+h(\Theta_-+1)=0\,.\ (4)$$

Исключая h и W из (3), получаем нелинейную систему уравнений относительно θ_- и z^* из которой находим θ_- и z^*:

$$\theta_-=-1+\frac{|\theta^*|}{\alpha}\sqrt{W_0\lambda_T}\,,\quad z^*=\frac{\theta^*+1-\frac{|\theta^*|}{\alpha}\sqrt{W_0\alpha_T}}{|\theta^*|\gamma}\sqrt{\frac{\lambda_T}{W_0}}.$$

В начальный момент времени биологическая ткань имеет постоянную температуру, а с понижением температуры криозонда понижается и температура поверхности биологической ткани. Для всех $\tau<\tau^*$ в биологической ткани эволюция температурного поля описывается решением обычной задачи теплопроводности:

$$\gamma\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-W\theta-K\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=0,\qquad 0<x<\infty,\quad 0<\tau<\tau^*,$$
$$\theta(x,0)=0,\quad 0<x<\infty,\qquad (4)$$
$$\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x}=\tilde{h}(\theta-\theta_A),\ x=0,\quad \lim_{x\to\infty}\theta(x,\tau)=0,$$

Используя преобразование Лапласа задача (4) трансформируется к следующей задаче:

$$\gamma\frac{d^2\bar\theta}{dx}-W\bar\theta-Kp\bar\theta=0,\quad 0<x<\infty,$$
$$\gamma\frac{d\bar\theta}{dx}=\bar{h}\left(\bar\theta-\bar\theta_A\right),\quad x=0,\quad \lim_{x\to\infty}\bar\theta(x,p)=0,$$

Для изображения $\bar\theta(x,p)$ при этом получаем выражение:

$$\bar\theta(x,p)=\bar\theta\cdot\frac{\exp\left(-\sqrt{W+Kp}\,x\right)}{\sqrt{h+\gamma\sqrt{W+Kp}}},\quad \mathrm{Re}\left(\sqrt{W+Kp}\right)>0,\ (5)$$

а оригинал определяется по формуле:

$$\theta(x,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar\theta(x,p)e^{p\tau}dp,\ (6)$$

По теплофизическому смыслу, $\theta(x,\tau)$ является монотонно возрастающей функцией координаты x, что позволяет представить решение задачи в виде:

$$\theta(x,\tau)=\tilde\theta(x,\tau)=\theta_-(\tau)\exp(-b(\tau)x),\quad b(\tau)>0,\qquad (7)$$
$$b(\tau)=h\left(\frac{\theta_A(\tau)-\theta_-(\tau)}{\theta_-(\tau)}\right).$$

Применяя метод эквивалентной линеаризации [4-8], находим приближенное решение, где функции $\theta_-(\tau)$ и $x^*(\tau)$ связаны соотношениями:

$$\theta_-=\frac{\theta^*+h\theta_A x^*}{1+hx^*},\quad x^*=\frac{\theta_--\theta^*}{h(\theta_A-\theta_-)}.\ (8)$$

После вычисления производных и интегралов, и исключая из полученных результатов функции $\theta\_(\tau)$ уравнения преобразуется к дифференциальному уравнению относительно $x*(\tau)$:

$$(P+K|\theta*|+\frac{h(\theta*-\theta_A)}{2(1+hx*)^2}x*)\frac{dx*}{d\tau}+\qquad (9)$$
$$+\frac{h(1+\theta*)}{1+h}-\frac{2h(\theta*-\theta_A)}{2(1+hx*)}=0,\quad \tau>0,$$

которое надлежит интегрировать при начальном условии $x*(0)=0$. Если $\theta_A(\tau)=-1$, то для $x*(\tau)$ получаем задачу Коши, допускающее точное аналитическое решение.

В случае идеального теплового контакта предельным переходом при $h\to\infty$, задача Коши упрощается к виду:

$$\left\{P+K|\theta^*|+\frac{1}{2}\left[\theta^*-\theta_A(\tau)\right]\right\}x^*\frac{dx^*}{d\tau}+$$
$$+(1+\theta^*)x^*-\frac{1}{2}\frac{d\theta_A(\tau)}{d\tau}x^{*2}=\theta^*-\theta_A(\tau),\quad (10)$$
$$x^*(0)=0.$$

Опуская индекс (*) у искомой функции $x^*(\tau)$ и вводя функцию, $f(\tau)=\theta^*-\theta_A(\tau)$, $f=-\theta_A$, получаем:

$$\left\{P+K|\theta^*|+\frac{1}{2}f\right\}x\dot{x}+ \quad (11)$$
$$+(1+\theta^*)x+\frac{1}{2}\dot{f}x^2-f=0,\tau>0.$$

Неявная разностная схема приводит к соотношению

$$A(\tau_n)x_n\frac{x_n-x_{n-1}}{\Delta\tau}+x_n+c(\tau_n)x_n^2-\varphi(\tau_n)=0,\quad (12)$$

где $A(\tau)=Q+\frac{1}{2}\varphi(\tau),\quad c(\tau)=\frac{1}{2}\dot{\varphi}(\tau)$.

Решив (12), получаем рекуррентное соотношение для его положительного корня.

График зависимостей $\theta_A=\theta_A(\tau)$ и $\theta_-=\theta_-(\tau)$ от τ представлены на рис.1

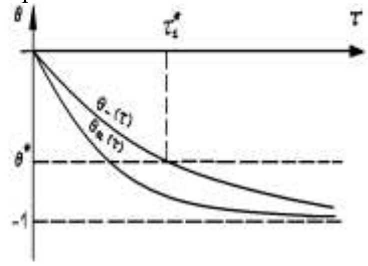

Рис.1

Из рисунка видно, что температура поверхности ткани не ниже температуры охлаждающей поверхности криозонда.

С увеличением β происходит ускорение динамики координаты замораживания биологической ткани.

Кроме динамики изотермы замораживание $x^*=x^*(\tau)$ и времени практического достижения стационарного состояния $\tau=\tau_c$, при котором $x(\tau_c)=0.95$, очень важной характеристикой процесса криодеструкции является временной интервал $\Delta\tau=\tau(\theta_n,z)-\tau(\theta^*,z)$, в течение которого биологическая ткань в точке $z<z_n$ находится в интервале температуры $\theta_n<\theta<\theta^*$, $/U_n<U<U^*/$. Для него имеет место формула:

$$\Delta\tau=F\left(\frac{x-f(\theta_n)}{1+hf(\theta_n)}\right)-F(x),\quad (13)$$

где $f(\theta)=(\theta-\theta^*)\left[h(1+\theta^*)\right]^{-1}$. Если этот интервал мал, то клетки в данной точке $z=xz^*$ не успевают подвергнуться губительному гипертоническому воздействию внеклеточной жидкости. Следовательно, в этой точке число убиваемых клеток уменьшается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуемая одномерная задача позволяет просчитать ряд типичных случаев замораживания биологической тканей, с достаточной точностью определить частные и общие закономерности процесса, составить серии номограмм, необходимых для использования в практической медицине, наметить дальнейшие направления исследования. Полученные простые приближенные аналитические выражения для динамики температурного поля и его изотерм дают возможность хирургу оперативно решать вопросы расчета, прогноза, управления и оптимизации процессов криогенного поражения биологических тканей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Березовский А.А., Кудаева Ф.Х. Канонический вид задач со свободными границами в проблемах гипотермии и криодеструкции биоткани //Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений - Киев Институт математики АН Украины, 1992 г.
2. Бородин С.Л. Численные методы решения задач Стефана. //Вестник ТюмГУ. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. Т.1. №3(3), С.165-177.
3. Йохансcон Б.Т., Чапко Р. Метод граничних інтегралів для чисельного розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа // Укр. мат. журн. – 2016. – Т. 68. – № 12. – С. 1665–1682 [Электронный ресурс]. – URL: http://umj.imath.kiev.ua/volumes/issues/?lang=ua&year=2016&number=12
4. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х., Кармоков М.М., Нахушева Ф.М. Математическая модель плоской криодеструкции биологической ткани. Современные проблемы науки и образования. №2, URL: www.science-education.ru/129-21683, 2015г.
5. Митропольский Ю.А., Березовский А.А., Кудаева Ф.Х. Задачи со свободной границей в криохирургии/Нелинейная механика и математическая физика. Т.18, №52, 1993г., С.83-91
6. Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Karmokov M.M., Kerefov M.A. , Edgulova E.K., Bechelova A.R. Information and Communication Technologies Solving a Free Boundaries Problems/ Proceedings of the 2017 International Conference «Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies» (IT&QM&IS) September, 23-30, 2017 St. Petersburg, Russia, 2017, ISIN 978-1-5386-0703-9, С. 226-233
7. Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Paritov A.U., Khashhozheva D.A., Zhemuhov A.Kh. Objectives with free borders in problems of medicine/ Международная научная мультиконференция, посвященная 190-летию СПГТИ(ту): MMET NW 2018 – IEEE NorthWest Russia conference on Mathematical Methods in engineering and technology 10 – 14 сентября 2018г., С.531-534
8. Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Khashhozheva D.A., Zhemuhov A.Kh., Nakhusheva F.M., Medalieva R.Kh. Application of information and communication technologies in cryomedicine/ Proceedings of the 2018 International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS), September, 24-28, 2018, St.Peterburg. Russia, 2018, p. 672-674
9. Окулов Н.А. Об одном численном методе решения одномерных задач типа Стефана//Вычислительные методы и программирование. 2011. – т.12, С.238-246.

Кудаева Фатимат Хусейновна, к- ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Россия , 360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173, e-mail: kfatimat@yandex.ru, тел.8-963-168-51-51

Кайгермазов Арслан Ахматович, к- ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М.

Бербекова», Россия , 360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173, e-mail: kfatimat@yandex.ru, тел.8-903-425-46-20

Хашхожева Диана Адамовна, к.б.н., доцент, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова», Россия , 360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173, e-mail: dianaadamovna@mail.ru

Жемухов Аслан Хачимович, к.э.н., доцент, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В.М. Кокова», e-mail: dianaadamovna@mail.ru

Балкарова Светлана Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова, Россия , 360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173, e-mail: kfatimat@yandex.ru

Этезова Мадина Борисовна,аспирантка Кабардино-Балкарский Государственный Университет им. Х.М. Бербекова, Россия , 360004, Нальчик, ул. Чернышевского 173, e-mail: kfatimat@yandex.ru

INFORMATION TECHNOLOGIES IN THE STUDY OF THE PROBLEM WITH FREE BOUNDARIES OF THE CONTROLLED CRYODESTRUCTION OF BIOLOGICAL TISSUE IN MEDICINE

F.Kh. Kudayeva[1], A.A. Kaygermazov[1], D.A. Khashkhozheva[1], A.Kh. Zhemukhov[2] , S.B. Balkarova[1], M.B. Etezova[1]

[1]«Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov», Nalchik
[2] "Kabardino-Balkarian State Agrarian University named after V.M. Kokov", Nalchik

Abstract. In recent years , the low-temperature method of destruction of various pathological formations is widely used in medicine. The results archived in the field of Cryobiology and apparatus method allowed to form a new field of medicine cryosurgery, which has become an important clinical method of treatment. Cryosurgery is considered to be an accurate and controlled process, although a complete solution of its thermal aspects has not been obtained to date. In this regard, along with experimental research is very important mathematical modeling of thermal processes of freezing biological tissue, requiring the development of effective methods for solving the most complex problems of mathematical physics – problems such as Stefan. The proposed work is devoted to the study of one-dimensional problem with free boundaries by means of information and communication technologies. The purpose of the application of information and communication technologies in the study of one-dimensional problem with free boundaries. The exact analytical solution of the stationary problem is found. Using information technology, the graphs of the temperature field versus time in the case of controlled cryodestruction and the process of freezing of biological tissue are constructed. An approximate solution of the unsteady problem is obtained by the equivalent linearization method. The results obtained in this work can be applied to the calculation of low-temperature effects on biological tissue, determining the value of the parameters of freezing, as well as in the design of cryoinstruments. In theoretical terms the issues of existence, uniqueness, monotony and spatial localization remain relevant for solving problems. In terms of applications, approximate analytical and numerical-analytical methods of their solution are important here.

Keyword: *information and communication technologies, free boundary problem, stationary problem, controlled cryodestruction, mathematical simulation.*

REFERENCES

1. Berezovsky A.A., Kudaeva F.H. Canonical form of the problem with free boundaries in the problems of hypothermia and cryodestruction of biotissue //Asymptotic integration of nonlinear equations - Kiev Institute of mathematics of the Academy of Sciences of Ukraine, 1992.
2. Borodin S.L. Numerical methods for solving Stefan problems. //Vestnik TSU. Physical and mathematical modeling. Oil, gas, energy. – 2015. Vol.1. No. 3(3), Pp. 165-177.
3. *Johansson T.B., Chapko R*. The Method of boundary integrals for numerical rosv yazuvannya Cauchy problems for Laplace runanga // Ukr. mate. journal. – 2016. – Vol. 68. – № 12. – P. 1665-1682 [Electronic resource]. – URL: http://umj.imath.kiev.ua/volumes/issues/?lang=ua&year=2016&number=12
4. Kaygermazov A.A., Kudaeva F.H., Karmokov M.M., Nakhusheva F.M. Mathematical model of flat cryodestruction of biological tissue. Modern problems of science and education. No. 2, URL: www.science-education.ru/129-21683, 2015г.
5. Mitropolsky Y.A., Berezovsky A.A., Kudaeva F.H. The Problem with a free boundary in cryosurgery/Nonlinear mechanics and mathematical physics. Vol. 18, No. 52, 1993, Pp. 83-91.
6. Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Karmokov M.M., Kerefov M.A. , Edgulova E.K., Bechelova A.R. Information and Communication Technologies Solving a Free Boundaries Problems/ Proceedings of the 2017 International Conference «Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies» (IT&QM&IS) September, 23-30, 2017 St. Petersburg, Russia, 2017, ISIN 978-1-5386-0703-9, C. 226-233
7. Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Paritov A.U., Khashhozheva D.A., Zhemuhov A.Kh. Objectives with free borders in problems of medicine/ Международная научная мультиконференция, посвященная 190-летию СПГТИ(ту): MMET NW 2018 – IEEE NorthWest Russia conference on Mathematical Methods in engineering and technology 10 – 14 сентября 2018г., С.531-534
8. Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Khashhozheva D.A., Zhemuhov A.Kh., Nakhusheva F.M., Medalieva R.Kh. Application of information and communication technologies in cryomedicine/ Proceedings of the 2018 International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS), September, 24-28, 2018, St.Peterburg. Russia, 2018, p. 672-674
9. Okulov Kh.A. On a numerical method for solving one-dimensional Stefan-type problems//Computational methods and programming, 2011. – т.12, p.238-246.

Fatimat Khuseynovna Kudayeva - «Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov», Institute of Physics and Mathematics, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Associate Professor, Tel.:89631685151, E-mail: kfatimat@yandex.ru

Arslan Akhmatovich Kaygermazov - «Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov», Institute of Physics and Mathematics, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Associate Professor, Ph.D., Tel: 89034264620, E-mail: arslan1961@yandex.ru

Diana Adamovna Khashkhozheva -- «Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov», Institute of chemistry and biology, Department of biology, Geoecology, and molecular genetic bases of living systems, Associate Professor, Ph.D. Tel: 89287033323, E-mail: dianaadamovna@mail.ru

Aslan Khachimovich Zhemukhov – "Kabardino-Balkarian State Agrarian University named after V.M. Kokov", Faculty of Economics and management, Department of Management, Associate Professor, Ph.D. Address: 1A-19 Kirov, Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, 360003 Russia. Tel: 89287077988, E-mail: aslan01_1972@mail.ru

Svetlans Borisovna Balkarova «Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov», Institute of Physics and Mathematics, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Associate Professor, Ph.D.

Madina Borisovna Etezova «Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov», Institute of Physics and Mathematics.