

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ТОЧЕЧНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ В ПАССИВИРУЮЩЕМ ЭЛЕКТРОЛИТЕ

В.П. Житников, Н.М. Шерыхалина, А.А. Соколова

Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет, г. Уфа

Процесс электрохимической обработки моделируется с помощью решения задачи Шварца для комплексного потенциала на параметрической области в виде полосы. В отличие от плоской задачи для определения напряженности электрического поля используются интегральные преобразования аналитической функции. На этой основе разработан численно-аналитический метод решения задачи, позволивший использовать для моделирования экспериментальные данные, а именно, немонотонную зависимость особого вида плотности тока от анодного потенциала. Это позволяет объяснить появление в натурном эксперименте на обрабатываемой поверхности трех зон: зоны активного растворения, зоны отсутствия растворения, соответствующей падающей части зависимости, и зоны слабого растворения, которая соответствует малым плотностям тока.

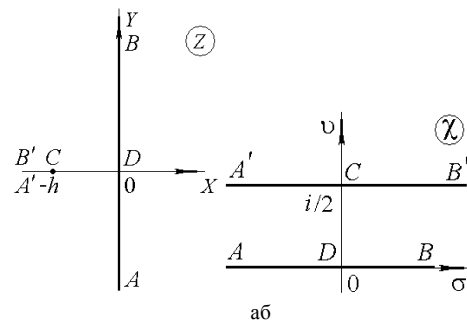
Ключевые слова: электрохимическая обработка, осесимметричная задача, анодный потенциал, немонотонная зависимость, интегральные преобразования.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс электрохимической обработки (ЭХО) определяется физико-химическими свойствами пары металл-электролит. В частности, электродный потенциал анода существенно зависит от плотности тока J [1].

Плоские задачи с монотонной зависимостью анодного потенциала $\Phi_a(J)$ были решены [2,3,4] для двугранного и криволинейного бесконечного анода, при этом требование монотонности $\Phi_a(J)$ было существенно для предложенных методов решения задач. В последующих работах [5,6,7] при решении плоских задач с немонотонной зависимостью нормальной составляющей плотности тока $J_n = F_1(\Phi_a)$ использовались степенные ряды, условие сходимости которых существенно ограничивает вид краевого условия. Вследствие этого, в данных работах [5,6,7] использовалась упрощенная зависимость $J_n = F_1(\Phi_a)$, далекая от зависимости, аппроксимирующей экспериментальные данные [2,8,9]. В последующих задачах [10,11] решены плоские задачи обработки точечным ЭИ с экспериментальной зависимостью $J_n = F_1(\Phi_a)$ методом, использующим интеграл Шварца [12].

Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим осесимметричную задачу о распределении электрического поля между точечным электродом-инструментом (ЭИ) C , расположенным на расстоянии h от плоского анода AB (рис. 1,а), $Z=X+iY$. Примем во внимание, что анодный потенциал анода зависит от плотности тока. Используется реальная зависимость плотности тока от Φ_a , т.е. нормальная составляющая $J_n = F_1(\Phi_a)$ [1].



а-физическая плоскость; б-параметрическая плоскость

Рис. 1. Формы области на плоскостях

Задача решается в параметрическом виде. В качестве области изменения параметрического переменного $\chi=\sigma+i\nu$ удобно выбрать полосу ширины $1/2$ с соответствием точек, указанным на рис. 1,б.

Функция

$$Z(\chi) = ih \operatorname{sh} \pi\chi, \quad (1)$$

при $h>0$ конформно отображает полосу плоскости χ на левую полуплоскость с разрезом. При этом граница $\chi=\sigma$ отображается на поверхность ADB , граница $\chi=\sigma+i/2$ – на разрез $A'CB'$. Положение точечного источника $Z(i/2)=-h$.

При допущении об однородности среды электрическое поле является потенциальным и соленоидальным, и для решения плоских задач такого типа широко применяются методы теории аналитических функций комплексного переменного [1,2,3,4,5,6,7], поскольку удовлетворяются уравнения Коши-Римана для потенциала Φ и функции тока Ψ [12]. Для осесимметричного поля соответствующие уравнения выглядят следующим образом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad (2)$$

(если осью симметрии является ось X). Наличие множителя $1/Y$ в правых частях уравнений не позволяет напрямую использовать аналитические функции для моделирования распределения потенциала и функции тока. Однако Г.Н. Положим (Положий, 1965) были разработаны интегральные преобразования аналитических функций комплексного переменного $f(Z)$, позволяющие получить нужные зависимости

$$\Phi(X_0, Y_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{X_1}^{Z_0} f(Z) \frac{dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (3)$$

$$\Psi(X_0, Y_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{X_1}^{Z_0} f(Z) \frac{(Z-X_0)dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (4)$$

где $Z_0 = X_0 + iY_0$ – внутренняя или граничная точка поля; $X_1 + i0$ – некоторая точка на оси симметрии X ; $\bar{Z}_0 = X_0 - iY_0$.

Таким образом, осесимметричная задача решается путем сведения ее к вспомогательной плоской задаче. Потенциал и функция тока осесимметричного поля получаются путем интегральных преобразований (3),(4), примененных к функции $f(Z)=dw/dZ$ [1], где $w(Z)$ – комплексный потенциал плоского поля.

Нормальная и тангенциальная составляющие плотности электрического тока на аноде равны

$$J_n = v_1 J_x, \quad J_x = \frac{\partial \Phi_a}{\partial X} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sh} \pi \sigma \operatorname{ch} \pi \sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad (5)$$

$$J_t = v_1 J_y, \quad J_y = \frac{\partial \Phi_a}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \sigma} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \sigma}, \quad (6)$$

где v_1 – коэффициент, определяемый ниже.

Способ решения задачи заключается в представлении потенциала и функции тока в виде сумм

$$\begin{aligned} \Phi(X_0, Y_0) &= \Phi_0(X_0, Y_0) + \Phi_1(X_0, Y_0) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{v_2}{\sqrt{(X_0+1)^2 + Y_0^2}} - \\ &- \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial w_1}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (7) \\ \Psi(X_0, Y_0) &= \Psi_0(X_0, Y_0) + \Psi_1(X_0, Y_0) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{v_2(X_0+1)}{\sqrt{(X_0+1)^2 + Y_0^2}} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial w_1}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{(Z-X_0)d\sigma}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \quad (8)$$

где первые слагаемые представляют собой потенциал и функцию тока точечного источника [1]

Будем искать решение в виде функции

$$f_1(\chi) = \frac{\partial w_1}{\partial \chi}(\chi). \quad (9)$$

Искомые параметрами аналогично [14], будут значения действительной части функции $\operatorname{Re} f_1(\sigma_m) = f_m$ в узловых точках σ_m , ($m=1, \dots, n-1$). При $\sigma=\sigma_0=0$ $\operatorname{Re} f_1(\sigma_0) = 0$. При $\sigma=\sigma_n$ примем $\operatorname{Re} f_1(\sigma_n) = 0$. Значения $\operatorname{Re} f_1(\sigma)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $S(\sigma)$.

Функция $f_1(\chi)$ должна обладать определенными свойствами: при $\chi=\sigma+i0$ ее действительная часть должна быть нечетной функцией σ , при $\chi=\sigma+i/2$ $f_1(\sigma+i/2)$ должна быть чисто действительной. Тогда ее, согласно принципу симметрии [12], можно аналитически продолжить на полосу единичной ширины. При этом $\operatorname{Re} f_1(\sigma+i) = \operatorname{Re} f_1(\sigma+i0)$.

Для восстановления функции $f_1(\chi)$ используем формулу Шварца [12]

$$f_1(\chi) = i \left[\int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma - \int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma \right]$$

Интегралы вычисляются модифицированным методом Гаусса [14]. Зависимости (7), (8) интерполируются сплайнами, при этом коэффициенты этих сплайнов равны значениям производных этих зависимостей, которые используются в (5), (6) для вычисления составляющих плотности тока.

Рассмотрим зависимость анодного потенциала, аппроксимирующую экспериментальные результаты [1, 9] (рис. 2):

$$\begin{aligned} J_n(\Phi_a) &= 0,025 - 0,692\Phi_a + 1,298\Phi_a^2 - 0,965\Phi_a^3 + \\ &+ 0,223\Phi_a^4 + 0,17 \operatorname{tg}(0,655\Phi_a) + \frac{0,0143\Phi_a}{\Phi_a^7 + (0,5712)^7}, \\ \Phi_a &\geq 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Такая зависимость характерна для обработки в пассивирующих электролитах [1, 2, 8, 9]. Поскольку согласно рис. 2 $J_n(0) > 0$, примем, что потенциал электрического поля $\Phi^*(\chi) = \Phi(\chi) + \Delta\Phi_a$, где $\Delta\Phi_a \approx 0,7$ В – значение анодного потенциала при отсутствии тока в цепи.

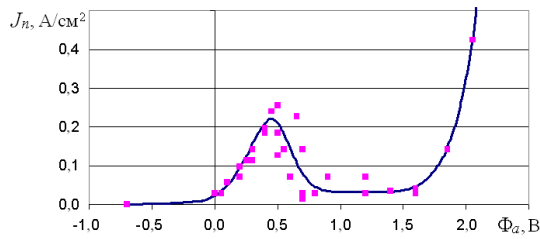


Рис. 2. График аппроксимирующей зависимости (14): \blacksquare – результаты эксперимента (Φ_a в вольтах, J_n – в A/cm^2)

Задача решается методом коллокаций. Равенство (10) выполняется в дискретных точках $\chi_m = \sigma_m + i0$; $m = 1, \dots, n-1$. Полученная таким образом система $n-1$ нелинейных уравнений решается методом Ньютона с регулированием шага.

Задача решается в условно-размерных единицах, чтобы привести полученные результаты к зависимости (10) и результатам эксперимента [1, 9]. При этом значения $v_1=2.6$; $v_2=10$ подобраны экспериментально.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 3 показано распределение потенциала по поверхности анода, на рис. 4 – распределение тангенциальной составляющей, на рис. 5 – полной плотности тока, на рис. 6 – нормальной составляющей плотности тока.

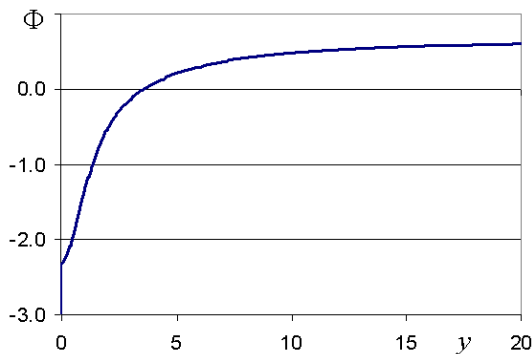


Рис. 3. Распределение потенциала по поверхности анода

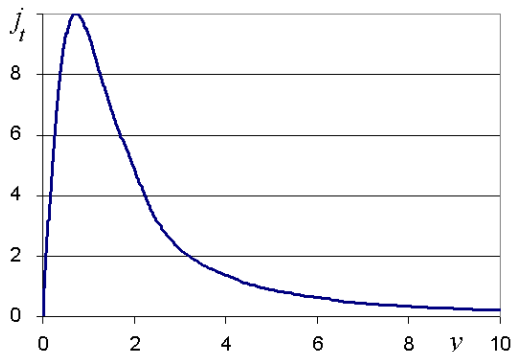


Рис. 4. Распределение тангенциальной составляющей плотности тока по поверхности анода

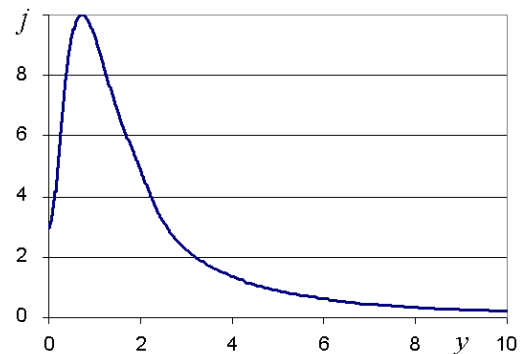


Рис. 5. Распределение полной плотности тока по поверхности анода

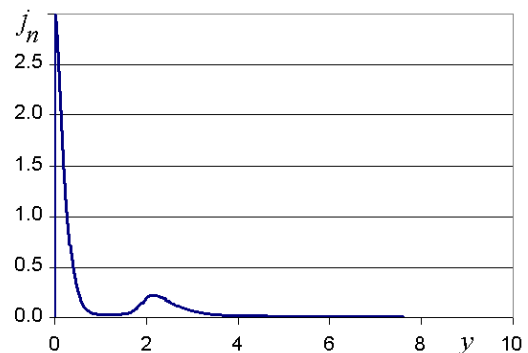


Рис. 6. Распределение нормальной составляющей плотности тока по поверхности анода

Оценка погрешности численного решения проводилась методом фильтрации результатов вычислений [15-18]. На рис. 7, 8 результаты фильтрации представлены в логарифмическом масштабе. По оси ординат отмечены десятичные логарифмы абсолютных величин полученных оценок абсолютных погрешностей $\Delta - \lg \Delta$, (точность полученных данных). По оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа отрезков разбиения n (которое изменялось от 20 до 640 с увеличением в 2 раза). В качестве оцениваемых параметров на рис. 7,а рассмотрен потенциал центральной точки $y_D=0$, а на рис. 7,б – нормальная составляющая плотности тока в той же точке. Цифрой 0 отмечены оценки точности вычисленных данных, цифрами 1, 2, ... результаты первой, второй и т.д., фильтрации. Разность ординат между двумя кривыми представляет собой логарифм отношения оценок для разных фильтраций. Это отношение называется размытостью оценки. На уровне 3-го знака наблюдается нарушение регулярности, вызванное погрешностью округления и ухудшением обусловленности матриц. С помощью фильтрации получены и подтверждены значения $\Phi_D=2.317 \pm 10^{-3}$, $J_G=3.00 \pm 10^{-2}$. Следует отметить, что вследствие (5) значения параметров в точках близких к оси симметрии определяются с наихудшей точностью.

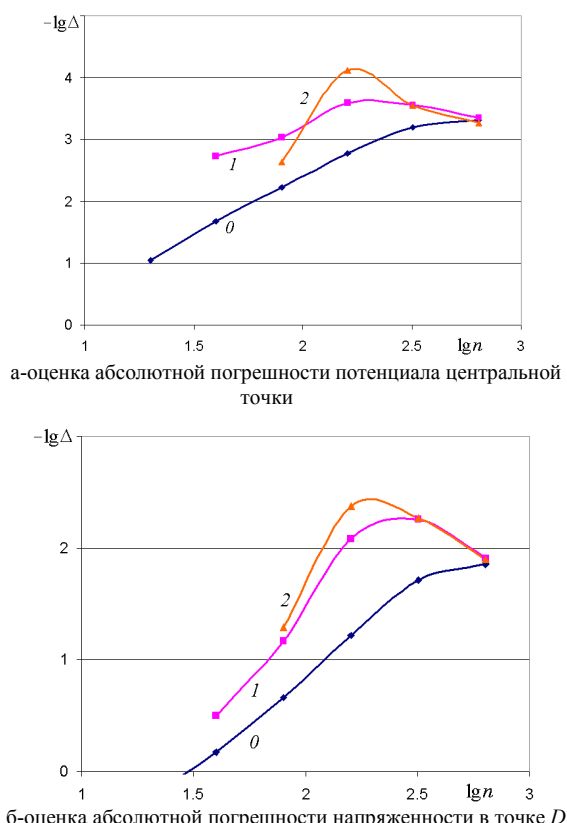


Рис. 7. Оценка абсолютной погрешности решения осесимметричной задачи

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе предложен метод численного решения задачи начальной электрохимической обработки точечным электродом-инструментом в осесимметричной постановке, основанный на интегральных преобразованиях аналитической функции.

Найдены распределения составляющих напряженности и численные значения, характеризующие эти значения.

Проведена оценка погрешности параметров, показавшая, что значения потенциала границы вычислены с точностью до 3-х значащих цифр.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-07-00356.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. – 413 с.
2. Клоков В.В., Шишкин С.Е. Стационарное анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Тр. семин. по краевым задачам. Казань, Казанск. ун-т. 1985. Вып. 22. С. 117–124.
3. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Изв. вузов. Авиационная техника. 2002. № 4. С. 55–57.
4. Газизов Е.Р. Анодное формообразование криволинейным катодом при неравномерной поляризации анода // Изв. КГАСУ. Казань. 2006. № 1 (5). С. 132–135.

5. Муксимова Р.Р., Житников В.П., Зарипов А.А. Исследование влияния неравномерности потенциала при электрохимической обработке в пассивирующем электролите // Материалы III Междунар. науч.-практ. конф. «Теория и практика современных электрохимических производств». СПб., 2014. С. 37–38.

6. Зарипов А.А. Моделирование электрохимической обработки стержневым электрод-инструментом в пассивирующем электролите // Сб. науч. тр. по материалам VIII Междунар. науч.-практ. конф. «Теоретические и прикладные аспекты современной науки». Ч. 1. Белгород, 2015. С. 8–14.

7. Житникова Н.И., Зарипов А.А., Федорова Г.И. Моделирование электрохимической обработки круглым электрод-инструментом в условиях непостоянства электродных потенциалов // Тенденции развития науки и образования: сб. науч. тр. по материалам XXIX междунар. науч.-практ. конф. 31 августа 2017 г. Ч. 3. Самара, изд. НИЦ «Л-Журнал», 2017. С. 5–9.

8. Седыкин Ф.В., Орлов Б.П., Матасов В.Ф. Исследование анодного тока при электрохимической обработке при постоянном и импульсном напряжении // Технология машиностроения. 1975. № 39. С. 3–10.

9. Kosarev T.V., Idrisov T.R., Zaitsev A.N., Zhitnikov V.P. Investigation and Simulation of Topology of Passivity and Active Dissolution Areas on Anode for Electrochemical Machining with Additional Cathode // Proc. of 15th intern. symposium on electromachining ISEM-15. Pittsburgh, Pennsylvania – USA, April 23–27 2007. P. 305–308.

10. Шерыхалина Н.М. Численное исследование особенностей электрохимического растворения при обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите // Межд. науч.-иссл. журнал. 2017, № 09(63), часть 3. С. 82–87.

11. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Зарипов А.А. Моделирование электрохимического формообразования в условиях немонотонной зависимости анодного потенциала от плотности тока // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, №4. С. 25–31.

12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

13. Положий Г.Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Киев. ун-т, 1965. – 442 с.

14. Житников В.П., Зиннатуллина О.Р., Житникова Н.И. Модификация методов численного интегрирования для решения осесимметричных задач // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19, № 2 (68). С. 179–182.

15. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. – С. 53–60.

16. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Обоснование методов фильтрации результатов численного эксперимента // Вестник УГАТУ, 2007. – Т. 9, – №3 (21). – С. 71–79.

17. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2009. – №3(80), СПб. – С. 105–110.

18. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Sokolova A.A. Problem of Reliability Justification of Computation Error Estimates. Mediterranean Journal of Social Sciences, 2015. – Vol. 6, – № 2, – pp. 65 – 78.

Житников Владимир Павлович – профессор кафедры «Вычислительная математика и кибернетика» УГАТУ, д.ф.-м.н, тел. 89174129428, e-mail: zhitnik@mail.ru.

Шерыхалина Наталья Михайловна – профессор кафедры «Вычислительная математика и кибернетика» УГАТУ, д.т.н, тел. 89053595333, e-mail: n_sher@mail.ru.

Соколова Александра Алексеевна – аспирант УГАТУ, тел. 89874922048, e-mail: alexandrakrasich@gmail.com.

AXISYMMETRIC PROBLEM ABOUT ELECTROCHEMICAL SHAPING BY THE POINT ELECTRODE-TOOL IN THE PASSIVATING ELECTROLYTE

V.P. Zhitnikov, N.M. Sherykhalina, A.A. Sokolova

Ufa State Aviation Technological University, Ufa

Process of electrochemical machining is modeled by means of the solution of a Schwartz problem for complex potential on parametrical region in the form of a strip. Unlike a flat problem for determination of electric field strength integral transformations of analytical function are used. On this basis the numerical-analytical method of the solution of a problem which allowed to use for modeling experimental data, namely, nonmonotonic dependence of a special type of current density on anode potential is developed. It allows explaining emergence in natural experiment on the processed surface of three zones: the zone of active dissolution, a zone of lack of dissolution corresponding to the falling part of dependence, and a zone of weak dissolution which corresponds to small current density.

Keywords: electrochemical machining, axisymmetric problem, anode potential, nonmonotonic dependence, integral

REFERENCES

1. Zhitnikov V.P., Zaytsev A.N. Impulse electrochemical dimensional machining. Moscow: Mashinostroenie, 2008. – 413 p.
2. Zhitnikov V.P., Zinnatullina O.R., Oshmarina E.M., Fedorova G.I. Modeling of an electrochemical shaping at restrictions on dissolution // Scientific and technical sheets SPbGPU. Saint Petersburg. 2009. – №4 (82), – pp. 221–224.
3. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Fedorova G.I. The use of discontinuous functions for modeling the dissolution process of steady-state electrochemical shaping // Russian Mathematics: Alerton Press, Inc., 2010. – Vol. 54, – No.10, – pp. 67-70.
4. Zhitnikov V.P., Oshmarina E.M., Porechny S.S., Fedorova G.I. Limit model of electrochemical dimensional machining of metals. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2014, – Vol.55, – No.4, – pp.718–725.
5. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Porechny S.S. Stationary electrochemical machining simulation applying to precision technologies, in Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS, Chelyabinsk, Russia), 2017. – Vol. 10, – № 4, – pp. 15–25.
6. Polozhiy G.N. Generalization of analytic functions of complex variable theory. Kiev University, 1965. – 442 p.
7. Sherykhalina N.M., Zinnatullina O.R., Sokolova A.A. Modeling of stationary process of an electrochemical axisymmetric shaping by point electrode-tool // Achievements of modern science. Belgorod. 2017. – Vol. 2, – № 8, – pp. 137 – 144.
8. Zhitnikov V.P., Fedorova G.I., Sherykhalina N.M., Urakov A.R. Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem // Journ. Eng. Math. – Vol. 55, – № 1-4, 2006, – pp. 255-276.
9. Zhitnikov V.P., Zinnatullina O.R., Porechny S.S., Sherykhalina N.M. Determining the limiting solutions of nonstationary axisymmetric Hele-Shaw problems // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, – Vol. 50, – № 4, 2009, – pp. 617–627.
10. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of functions of the complex variable. – Moscow: Science, 1973. – 736 p.
11. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Zaripov A.A. Modelling of precision steady-state and non-steady-state electrochemical machining by wire electrode-tool // Journal of Materials Processing Technology. 2016, – Vol. 235, – pp. 49–54.
12. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M. Methods of verification of mathematical models in the conditions of uncertainty // Vestnik UGATU. 2000. – № 2, – pp. 53–60.
13. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M. Justification of methods of a filtration of results of numerical experiment // Vestnik UGATU, 2007. – Vol. 9, – №3 (21), – pp. 71–79.
14. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Porechny S.S. About one approach to a practical estimation of errors of numerical results // Scientific and technical sheets SPbGPU. – 2009. – №3(80), Saint Petersburg, – pp. 105–110.
15. Zhitnikov V. P., Sherykhalina N.M., Sokolova A.A. Problem of Reliability Justification of Computation Error Estimates. Mediterranean Journal of Social Sciences, 2015. – Vol. 6, – № 2, – pp. 65–78.

Zhitnikov Vladimir Pavlovich – Professor of the Department "Computational Mathematics and Cybernetics", Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Ufa State Aviation Technological University, 89174129428, e-mail: zhitnik@mail.ru.

Sherykhalina Natalya Michailovna – Professor of the Department "Computational Mathematics and Cybernetics", Doctor of Technical Sciences, Ufa State Aviation Technological University 89053595333, e-mail: n_sher@mail.ru.

Sokolova Alexandra Alexeevna – postgraduate student, 89874922048, Ufa State Aviation Technological University, e-mail: alexandrakrasich@gmail.com.