05.13.18

МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОДУКТИВНЫХ СИСТЕМ: КРИТЕРИЙ ПРОЦЕССОВ РАЗМНОЖЕНИЯ И ГИБЕЛИ «ТОЧНО-В-СРОК»

А.А. Коваленко[1]
[1] *Ульяновский Государственный университет, Л.Толстого 42, г. Ульяновск,*

В работе представлено описание математической модели стохастической динамической продуктивной системы с дискретными состояниями. Модель дана в терминах точечных считающих процессов, их компенсаторов и интенсивностей скачков.В работе дано обобщающее определение процессов «точно-в-срок». Сформулированный в статье критерий представляет собой необходимые и достаточные условия «точно-в-срок» для процессов размножения и гибели с интенсивностями скачков – случайными функциями, определяемыми начальными условиями. Математическое описание процессов «точно-в-срок» дано для достаточно общего случая, обобщающего известные случаи пуассоновских мостов.В статье рассматриваются два типа моделей стохастических систем - с конечными и бесконечными носителями плотности вероятности времени выполнения продуктивного процесса.Сформулирован и доказан критерий точно-в-срокдля процессов выполнения операций в случайной среде. Случайная среда представляет собой случайные функции – коэффициенты интенсивностей скачков процессов. Описания приводятся в траекторных мартингальных терминах, позволяющих аналитически анализироватьповедение траекторий процессов, а также решать задачи имитационного моделирования

Ключевые слова:математическое моделирование,продуктивная система, точно-в-срок,случайная среда.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе предлагается метод описанияпродуктивных систем и соответствующих процессов выполнения и поступления новых операций в достаточно общих случаях. При высокотехнологичной организации сельскохозяйственного производства и в современном промышленном производственаблюдается общность подходов и методов организации продуктивных процессов. Однако представленная здесь модель является довольно абстрактной и служит лишь начальным шагом, первой формализацией в математическом моделировании стохастических продуктивных систем. Этот шаг необходим, поскольку описания и исследования стохастических продуктивных систем в настоящее время востребованы, но развиты недостаточно.

Работатакже является обобщением и логическим продолжением работ[1 - 4], посвященных анализу систем точно-в-срок, а также близкой по методологии работы[5](см. также литературу в ней).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Математическим обоснованием данной классификации служат приведенные ниже теоремы. Представим формальное математическое описание стохастической модели выполнения операций. Рассмотрим стохастический базис $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ (т.е. вероятностное пространство $\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$ снабженное неубывающим непрерывным справа потоком σ-алгебр $\mathbf{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, пополненным по мере P (см. [6 -9]). На $\mathcal{B}$ определим продуктивный процесс $X=(X_t)_{t\geq 0}$, заключающийся в выполнении конечного положительного и целого числаKопераций. Траектории процесса Xпредполагаются регулярными, процесс рассматривается в мартингальных терминах (т.е., непрерывными справа при $t\geq 0$ и имеющими предел слева при $t>0$, см. [5 -7]).

В качествепродуктивного процесса рассмотримпроцесс размножения и гибели в случайной среде $\mathcal{E}=\left\{(\alpha_t)_{t\geq 0},(\beta_t)_{t\geq 0}\right\}$, где неотрицательные случайные функции α_t и β_t являются $\mathcal{F}_0$-измеримыми при всех $t\geq 0$ (см. [7 - 12] и литературу в них).Если случайная величина $X_t=X_t(\omega)$ является числом еще не выполненных операций продуктивного процесса, то для X, рассматриваемого как модель выполнения K операций (при $K>0$), справедливо: $X_t\in\{0,1,\dots,K\}$ при $t\geq 0$, $X_0=K\in\{1,2,\dots\}$ и $\Delta X_t=X_t-X_{t-}\in\{-1,0,1\}$ при $t>0$ (где $X_{t-}=\lim\limits_{s\to t-0} X_s$).Продуктивный процесс может быть представлен в виде

$$X_t=K+A_t-B_t\,, \quad (1)$$

где $A_0=B_0=0$ и неубывающие процессы $A=(A_t)_{t\geq 0}$ и $B=(B_t)_{t\geq 0}$ равны

$$A_t=\sum_{0<s\leq t} I\{\Delta X_s=1\}\cdot I\{1\leq X_{s-}\leq K-1\}\,,(2)$$

и

$$B_t=\sum_{0<s\leq t} I\{\Delta X_s=-1\}\cdot I\{X_{s-}\geq 1\}\,,(3)$$

где $I\{\cdot\}$ - индикаторная функция, т.е., $I\{true\}=1$, $I\{false\}=0$.

Заметим, что по определениям (2) – (3) для процесса X в представлении (1) очевидно выполняется требования отсутствия одновременных скачков A и B: P- п. н. выполняется равенство

$$\sum_{0<s<\infty} \Delta A_s \cdot \Delta B_s = 0 \quad (4)$$

При невырожденном и последовательном выполнениипроцессыАи Вявляютсяточечными, считающими. Поэтому, A и B- скачкообразные неубывающиесубмартингалы со скачками $\Delta A_t \in \{0, I(1 \le X_{t-} \le K-1)\}$ и $\Delta B_t \in \{0, I(X_{t-} \ge 1)\}$. При такихограничениях на скачки, значения X_t процесса Хнеотрицательны и не превышают уровня K.

В представлении (1) $B=(B_t)_{t\ge 0}$ является процессом выполнения. Это означает, что значения B_t процесса Впредставляют собой количество выполненных операций к моменту времени $t \ge 0$. При этом $A=(A_t)_{t\ge 0}$ - процесс возврата, т.е. значения A_t являются к моменту времени $t \ge 0$ числом возвращенных на доработку (переработку) или вновь заявленных к работе операций в пределах $X_t \in \{0,1,\ldots,K\}$.

Придостижения X_t нулевого уровня в некоторый случайный момент времени τ, эти значения остаются нулевыми, так как в настоящей работепредполагается, что при полном выполнении продуктивного процесса, он завершается (т.е. цикличность или повторяемость продуктивных процессов является предметом дальнейших исследований). Этот момент τ является Марковским на стохастическом базисе $\mathcal{B}$, и формально может быть определен в следующем виде:

$$\tau = \inf\{t>0 : X_t = 0\}.$$

Заметим, что если $P\{\tau<\infty\}=1$, то продуктивный процесс конечен, и τ является моментом остановки на стохастическом базисе $\mathcal{B}$. В этом случае определенафункция распределения $F_\tau(x)=P\{\tau \le x\}$ при всех $x \in (-\infty,\infty)$.

Определение. Назовем конечный продуктивный процесс $X=(X_t)_{t\ge 0}$ точно-в-срок (или процессом точно-в-срок T), если существует такое число $T \in (0,\infty)$, что

$$P\{\tau \le T\}=1 \text{ и } P\{\tau > T-\varepsilon\}>0 \;\; \forall\, \varepsilon>0.$$

Это условие также может быть представлено в эквивалентном виде одновременного выполнения условий (5) и (6):

$$F_\tau(T)=1 \quad (5)$$

и

$$F_\tau(T-\varepsilon)<1 \;\; \forall\, \varepsilon>0. \quad (6)$$

В модели мы предполагаем, что распределение процесса X определяется случайной средой $\mathcal{E}$. Следовательно, функция распределения $F_\tau(x)$ абсолютно непрерывна, т.е. существует плотность вероятности распределения моментов. Также отсюда следует, что компенсаторы процесса выполнения $B=(B_t)_{t\ge 0}$ и процесса возврата $A=(A_t)_{t\ge 0}$ абсолютно непрерывны, и их производные – интенсивности скачков, пропорциональные величине X_t в каждый момент времени $t \ge 0$. Иначе говоря, для субмартингалов $A=(A_t)_{t\ge 0}$ и $B=(B_t)_{t\ge 0}$ разложение Дуба-Мейера определяет компенсаторы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (см. [5, 8]) со значениями

$$\tilde{A}_t = \int_0^t a_s \cdot I\{1 \le X_s \le K-1\} ds \text{ и } \tilde{B}_t = \int_0^t b_s \cdot I\{1 \le X_s\} ds, \quad (7)$$

где $a_t = \alpha_t \cdot X_t$ и $b_t = \beta_t \cdot X_t$, а случайные $\mathcal{F}_0$-измеримые функции и составляют случайную среду $\mathcal{E}$. Таким образом, для процессов размножения и гибели,

$$\tilde{A}_t = \int_0^t \alpha_s \cdot X_s \cdot I\{X_s \le K-1\} ds \text{ и } \tilde{B}_t = \int_0^t \beta_s \cdot X_s ds. \quad (8)$$

Из (1), (7) и (8) следует, что для процесса выполнения Хсправедливо разложение

$$X_t = K + \tilde{A}_t - \tilde{B}_t + M_t^X \quad (9)$$

с квадратично интегрируемым мартингалом $(M_t^X)_{t\ge 0}$ с $M_0^X = 0$.

Из (9), (7) и (8) получаем, что

$$X_t = K - \int_0^t \left(\beta_s - \alpha_s \cdot I\{X_s \le K-1\}\right) \cdot X_s ds + M_t^X \quad (10)$$

В рассматриваемой модели предполагается, что на интенсивность процесса возврата наложены ограничения на выполнение новых операций (заметим, кстати, обеспечивающие P- п. н. конечность суммарного числа возвратов в силу отмеченной в (4) невозможности одновременных скачков A и B) на интервале времени $[0,T]$:

$$P\{\int_0^T \alpha_s ds < \infty\} = 1 \quad (11)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теорема.Пусть выполнено условие (11) для процесса возврата. Тогда условия (5) - (6) требования точно-в-срокT эквивалентны требованию условий (12) – (13):

$$P\{\int_0^t \beta_S ds < \infty\} = 1 \text{ при } t < T, \quad (12)$$

и

$$P\{\int_0^T \beta_S ds = \infty\} = 1. \quad (13)$$

Доказательство.Достаточность условий(12) и (13) теоремы для выполнения условий (5) и (6).Определим вспомогательную случайную функцию $\lambda_t = \beta_t - \alpha_t$ при всех $t \geq 0$. Очевидно, λ_t является $\mathcal{F}_0$-измеримой. При этом из (11), очевидно, следует, что

$$P\{\int_0^t \lambda_S ds < \infty\} = 1 \text{ при } t < T, \quad (14)$$

и

$$P\{\int_0^T \lambda_S ds = \infty\} = 1 \quad (15)$$

тогда и только тогда, когда выполняется условие теоремы (11). Для доказательствадостаточности для выполнения (5) условия (13),покажем достаточность условия (15).Из (10) следует, что

$$X_t = K - \int_0^t (\beta_S - \alpha_S) \cdot X_S ds + M_t^X -$$

$$-\int_0^t \alpha_S \cdot X_S \cdot I\{X_S \geq K\} ds =$$

$$= K - \int_0^t \lambda_S \cdot X_S ds - \quad (16)$$

$$-\int_0^t \alpha_S \cdot X_S \cdot I\{X_S \geq K\} ds + M_t^X$$

Обозначим $r_t = \mathrm{E}\{X_t \mid \mathcal{F}_0\}$ - условное математическое ожидание значения N_t продуктивного процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Поскольку при всех $t \geq 0$ для мартингала выполняется $\mathrm{E}\left\{M_t^X \mid \mathcal{F}_0\right\} = 0$, то из (16) следует равенство:

$$r_t = K - \int_0^t \lambda_S \cdot r_S ds - \int_0^t \alpha_S \cdot \mathrm{E}\{X_S \cdot I\{X_S \geq K\} \mid \mathcal{F}_0\} ds \quad (17)$$

Из того, что $X_S \cdot I\{X_S \geq K\}$ при всех $s \geq 0$, вытекает неравенство:

$$r_t \leq K - \int_0^t \lambda_S \cdot r_S ds. \quad (18)$$

Следователь, по известному неравенству Гронуолла-Беллмана, $r_t \leq \bar{r}_t$, где $\bar{r}_t$ - решение уравнения $\bar{r}_t = K - \int_0^t \lambda_S \cdot \bar{r}_S ds$ равное, очевидно, $\bar{r}_t = K \cdot \exp\left\{-\int_0^t \lambda_S ds\right\}$. Таким образом, из (15) получаем, что

$$r_T \leq \bar{r}_T = \lim_{t \to T} \exp\left\{-\int_0^t \lambda_S ds\right\} = 0, \quad (19)$$

т.е. условие (5) выполнено.

Покажем выполнение условия (6). Из (17) следует, что аналогично (18), выполняется неравенство (20):

$$r_t \geq K - \int_0^t \lambda_S \cdot r_S ds - \int_0^t \alpha_S \cdot r_S ds = K - \int_0^t \beta_S \cdot r_S ds. \quad (20)$$

Далее, аналогично (19) получаем, что при всех неотрицательных $t < T$ из (12) (или эквивалентного (14)) выполняется неравенство для $r_t = \mathrm{E}\{X_t \mid \mathcal{F}_0\}$:

$$r_t \geq \bar{r}_t = \exp\left\{-\int_0^t \beta_S ds\right\} > 0, \quad (21)$$

очевидно обеспечивавшее выполнение (6). Достаточность условий теоремы доказана.

Необходимость условий (12) и (13) теоремы. Необходимость (12) (или эквивалентного условия (14)) очевидна - в противном случае из (18) следовало бы, что $P\{X_u = 0\} = 0$, и поэтому, $F_\tau(u) = 1$ при каком-то значении $u < T$, что противоречило бы условию (6).

Покажем необходимость условия (13) от противного. Если (13) не выполняется, то для некоторых $n < \infty$ и $\varepsilon > 0$ существует множество $\Gamma = \Gamma(n, \varepsilon) \in \mathcal{F}_0$ такое, что

$$\Gamma = \left\{\omega \in \Omega : \int_0^T \beta_S ds \leq n\right\} \text{ и } P\{\Gamma\} \geq \varepsilon > 0. \quad (22)$$

Определим вспомогательный процесс $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ с $Y_t = X_t \cdot I\{\Gamma\} = Y_t \cdot I\{\omega \in \Gamma\}$. Очевидно, из (22) следует, что:

$$\Gamma \subseteq \{\omega : X_T(\omega) = Y_T(\omega)\}$$

и

$$P\{X_T = Y_T\} \geq P\{\Gamma\} \geq \varepsilon > 0 \,. \quad (23)$$

Пусть $v_t = \mathrm{E}\{Y_t \mid \mathcal{F}_0\}$. Тогда, полностьюаналогично (20) и (21)получаем, что

$$v_t \geq I\{\Gamma\} \cdot K - \int_0^t I\{\Gamma\} \cdot \beta_S \cdot v_S ds$$

и $r_T \geq \bar{r}_T = I\{\Gamma\} \cdot K \cdot \exp\left\{-\int_0^t \beta_S ds\right\} \geq I\{\Gamma\} \cdot K \cdot \exp\{-n\} > 0$

,

откуда следует, что $P\{\omega \in \Gamma : Y_T(\omega) > 0\} > 0$. Поэтому из (23) получаем неравенство $P\{X_T(\omega) > 0\} > 0$, противоречащее (5). Необходимость (13) доказана.Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный в работе критерий является базисным для задач построения моделей продуктивных систем точно-в-срок, поскольку обеспечить соответствующее поведение системы могут только такие характеристики интенсивностей скачков. Возможно именно обязательное отсутствие интегрируемости и затрудняло до настоящего времени исследование систем точно-в-срок. Аналитическое рассмотрение и компьютерное моделирование систем точно-в-срок востребовано и первые модели, позволяющие осуществлять оптимальное управление такими объектами проведено в [5]. Однако, в [5] исследуется достаточно «однородный» по времени случай, сводящийся к пуассоновским процессам в обратном времени, что и побудило сформировать предлагаемую в настоящей работе достаточно общую схему.

СПИСОКИСПОЛЬЗОВАННЫХИСТОЧНИКОВ

1. Sugimori, Y., Kusunoki, K., Cho, F., &Uchikawa, S. Toyota production system and kanban system materialization of just-in-time and respect-for-human system. The International Journal of Production Research, 1977. 15(6), 553-564. DOI: 10.1080/00207547708943149

2. Yavuz, M., Akçali, E. Production smoothing in just-in-time manufacturing systems: a review of the models and solution approaches. International Journal of Production Research, 2007. 45(16), 3579-3597.DOI: 10.1080/00207540701223410

3. Killi, S., Morrison, A. Just-in-Time Teaching, Just-in-Need Learning: Designing towards Optimized Pedagogical Outcomes. Universal Journal of Educational Research, 2015. 3(10), 742-750.DOI: 10.13189/ujer.2015.031013

4. Pape, T., Bolz, C. F., Hirschfeld, R. Adaptive just-in-time value class optimization for lowering memory consumption and improving execution time performance. Science of Computer Programming, 2017. 140, 17-29.DOI: 10.1016/j.scico.2016.08.003

5. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time //ВестникСамарскогогосударственноготехническогоуниверситета. Серия: Физико-математическиенауки. – 2018. – Т. 22. – №. 3. – С. 518-531.

6. Dellacherie, C. Capacitesetprocessusstochastiques. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

7. Butov, A.A. On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death processes. Statistics and Probability Letters, 2015. 101, 49-53.

8. Butov, A. A. Some estimates for a one-dimensional birth and death process in a random environment. Theory Probab. Appl., 1991. 36(3), 578-583.DOI: 10.1137/1136067

9. Butov, A. A.: Martingale methods for random walks in a one-dimensional random environment. Theory Probab. Appl., 1994. 39(4), 558-572.DOI: 10.1137/1139043

10. Butov, A. A. Random walks in random environments of a general type. Stochastics and Stochastics Reports, 1994. 48, 145-160.DOI: 10.1080/17442509408833904

11. Ho L. S. T. et al. Birth/birth-death processes and their computable transition probabilities with biological applications //Journal of mathematical biology. – 2018. – Т. 76. – №. 4. – С. 911-944. https://doi.org/10.1007/s00285-017-1160-3

12. Yang P. et al. A Birth and Death Process Model with Blocking Growth and its Numerical Simulation Research //2018 3rd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM 2018). – Atlantis Press, 2018. https://doi.org/10.2991/msam-18.2018.4

Коваленко Анатолий Александрович, аспирант по направлению «Прикладная математика и информатика»,тел. 89176079632, e-mail: 220281@rambler.ru

MODELS OF STOCHASTIC PRODUCTIVE SYSTEMS: A CRITERION OF BIRTH AND DEATH PROCESSES «JUST-IN-TIME»

A.A. Kovalenko[1]

[1]*Ulyanovsk State University", 42, Lev Tolstoi Street, Ulyanovsk, 432063, Russia*

Abstract- The paper presents a description of a mathematical model of a stochastic dynamic productive system with discrete states. The model is given in terms of point counting processes, their compensators and intensities of jumps. The article provides a generalizing definition of "just-in-time" processes. The criterion formulated in the article represents the necessary and sufficient "just-in-time" conditions for the processes of reproduction and death with jump intensities, which are random functions, determined by initial conditions. The mathematical description of the "just-in-time" processes is given for a fairly general case that goes beyond the model in the well-known case of a Poisson bridge.The paper discusses two types of models of stochastic systems - with finite and infinite carriers of the probability density of the execution time of the production process.A criterion is formulated and proved for the process of performing "just-in-time" operations in a random environment. Random environment is random functions - the intensity coefficients of the process jumps. The descriptions are given in trajectory martingale terms, allowing to analyze the behavior of the process passes, and solve simulation problems.

Index terms: mathematical modelling, productive system, just-in-time, martingale, birth and death processes, random environment, intensity, compensator.

REFERENCES

1. Sugimori, Y., Kusunoki, K., Cho, F., &Uchikawa, S. Toyota production system and kanban system materialization of just-in-time and respect-for-human system. The International Journal of Production Research, 1977. 15(6), 553-564. DOI: 10.1080/00207547708943149
2. Yavuz, M., Akçali, E. Production smoothing in just-in-time manufacturing systems: a review of the models and solution approaches. International Journal of Production Research, 2007. 45(16), 3579-3597.DOI: 10.1080/00207540701223410
3. Killi, S., Morrison, A. Just-in-Time Teaching, Just-in-Need Learning: Designing towards Optimized Pedagogical Outcomes. Universal Journal of Educational Research, 2015. 3(10), 742-750.DOI: 10.13189/ujer.2015.031013
4. Pape, T., Bolz, C. F., Hirschfeld, R. Adaptive just-in-time value class optimization for lowering memory consumption and improving execution time performance. Science of Computer Programming, 2017. 140, 17-29.DOI: 10.1016/j.scico.2016.08.003
5. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // ВестникСамарскогогосударственноготехническогоуниверситета. Серия: Физико-математическиенауки. – 2018. – Т. 22. – №. 3. – С. 518-531.
6. Dellacherie, C. Capacitesetprocessusstochastiques. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
7. Butov, A.A. On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death processes. Statistics and Probability Letters, 2015. 101, 49-53.
8. Butov, A. A. Some estimates for a one-dimensional birth and death process in a random environment. Theory Probab. Appl., 1991. 36(3), 578-583.DOI: 10.1137/1136067
9. Butov, A. A.: Martingale methods for random walks in a one-dimensional random environment. Theory Probab. Appl., 1994. 39(4), 558-572.DOI: 10.1137/1139043
10. Butov, A. A. Random walks in random environments of a general type. Stochastics and Stochastics Reports, 1994. 48, 145-160.DOI: 10.1080/17442509408833904
11. Ho L. S. T. et al. Birth/birth-death processes and their computable transition probabilities with biological applications //Journal of mathematical biology. – 2018. – Т. 76. – №. 4. – С. 911-944. https://doi.org/10.1007/s00285-017-1160-3
12. Yang P. et al. A Birth and Death Process Model with Blocking Growth and its Numerical Simulation Research //2018 3rd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM 2018). – Atlantis Press, 2018. https://doi.org/10.2991/msam-18.2018.4