

СОЗДАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВО ВНЕШНЕМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

В. М. Дорогинин

Волгоградский государственный университет, г. Волгоград

Реализован программный комплекс, предназначенный для исследования особенностей поведения вращающегося газа в условиях внешнего гравитационного потенциала и основанный на численной схеме MUSCL-Hancock. Описаны математическая модель и численный метод, лежащие в основе комплекса. Приводится описание программной реализации, использованных технологий. Проведены исследования особенностей возникновения и поведения ударных волн в спиральном гравитационном потенциале, приведены результаты этих исследований.

Ключевые слова: численная схема, MUSCL-Hancock, газодинамические течения, гравитационный потенциал.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема возникновения глобальных ударных волн в газовых дисках спиральных галактик описана в большом количестве литературы [1 – 3], начиная с работ [4 – 5], продемонстрировавших возможность существования стационарных ударных волн в приближении тугозакрученных спиралей. Значительное количество работ, посвященных численному моделированию динамики газовых дисков, демонстрирует важную роль спиральной волны плотности звездной компоненты [4], с которой связано возмущение гравитационного потенциала, принимающего вид потенциальной ямы. Возмущение гравитационного потенциала ответственно за генерацию глобальной ударной волны в газе. Коваленко и Леви в работе [6] провели анализ, результаты которого показывают, что ударная волна изначально возникает на задней относительно набегающего потока кромке потенциальной ямы, но затем эта позиция оказывается неустойчивой и фронт ударной волны перемещается в переднюю часть ямы. Данный результат в одномерном приближении подтверждается при решении нестационарных уравнений газодинамики [6].

Целью работы являлась реализация программного комплекса, который позволяет моделировать поведение газа в условиях, приближенных к условиям в спиральных галактиках, для проведения вычислительных экспериментов, направленных на исследование формирования и поведения ударных волн. Для этой цели выполнялась реализация численной схемы для уравнений газодинамики в цилиндрических координатах с добавлением внешнего спирального гравитационного потенциала. Инструменты для реализации комплекса были подобраны с расчетом на наиболее быстрое и эффективное выполнение расчетов на многопроцессорных системах.

В работе приводится пример серии вычислительных экспериментов, выполненных с использованием реализованного программного комплекса.

ГАЛАКТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Галактики представляют собой гигантские звездные системы, в которых сосредоточено основное число существующих в природе звезд и холодного газа [7]. Все объекты галактики находятся в движении относительно общего центра масс и удерживаются вместе суммарным гравитационным полем [7]. Галактики принято представлять состоящими из компонентов, которые отличаются разным пространственным распределением плотности или яркости, хотя не всегда между ними существует определенная граница. Выделяется три основных «барионных» компонента галактик – звездный диск, газопылевой диск и сферoidalный звездный компонент, наиболее яркая внутренняя часть которого называется балдж, а внешняя – звездное гало. Присутствие газопылевого диска определяется наличием пылевых прожилок, которые свидетельствуют о концентрации межзвездной пыли.

Галактики классифицируются на основе соотношений между яркостями или размерами перечисленных выше компонентов. Эллиптическими называют галактики, в которых дисковые компоненты слабоконтрастны или вовсе не обнаруживаются, остальные галактики относятся к дисковым. Дисковые же галактики делятся на линзовидные (S0), спиральные (S) и неправильные (Irr). Диски спиральных галактик содержат спиральные ветви, в некоторых случаях выражающиеся в кольца. Линзовидные галактики структурно схожи со спиральными, однако в них отсутствует четкий спиральный узор. Подробно о структуре и классификации галактик рассказывается в работе [7].

Также следует упомянуть о проблеме темной материи во Вселенной. Все космические тела и среды являются источниками излучения в определенных

интервалах спектра, хотя в оптическом диапазоне они могут выглядеть как «темные» (в качестве примера можно привести темные туманности). Однако в современной астрофизике существует понятие темная материя, или темная масса, под которым понимается среда, воспринимаемая только по ее гравитационному воздействию на «видимые» объекты. На текущий момент неизвестна природа темной материи, существует большой разброс оценок ее плотности, а также мнений о роли темной материи в эволюции наблюдаемых галактик и их систем. Однако существуют все основания полагать, что во многих галактиках масса темной материи многократно преобладает над массой барионного вещества даже в пределах оптического радиуса. Численные модели формирования галактик и их систем основываются на том, что они возникают из среды, в которой темная материя преобладает по плотности над барионной, а барионная составляющая галактики формируется на «дне» потенциальной ямы, которая создается бесстолкновительной средой темной материи, внутри массивного трехмерного образования – темного гало. Темной материи и связанными с ней вопросами посвящена работа [8].

ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Явления, рассматриваемые в астрофизике, принимают макроскопический характер, поэтому структура межзвездного газа рассматривается как сплошная среда. Это означает, что любой сколько угодно малый объем газа считается достаточным, чтобы содержать в себе большое число молекул. Исходя из этого, за математическую основу в модели принимается система уравнений газодинамики, которые представляются в виде законов сохранения.

Уравнения газодинамики, записанные в дивергентной форме, определяют поведение нестационарных течений идеального газа в эйлеровой системе координат. Они записываются следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u u^T + p \hat{I}) &= f, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p)u) &= u f, \end{aligned} \quad (1)$$

где t — время, ρ — плотность газа, p — давление, $u = (u_1, u_2)^T$ — вектор скорости, e — удельная внутренняя энергия,

$$E = \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right)$$

— полная энергия единицы объема. Такой набор физических параметров был выбран с учетом того, что модель строится для дисковых галактик, толщина которых пренебрежимо мала в сравнении с их диаметром, и толщиной галактического диска в данном случае можно пренебречь. В условиях, описывающих модель идеального газа

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)},$$

где γ — показатель адиабаты. $\hat{I} = \text{diag}(1, 1)$ — единичный тензор размерности 2×2 ; недифференциальный член $f = (f_1, f_2)^T$, который располагается в правой части уравнений (1), определяет воздействие на газодинамический поток внешних сил.

Система уравнений газодинамики описывает законы сохранения массы, импульса и энергии. В соответствии с этими законами изменение сохраняющихся величин в определенном объеме вещества происходит исключительно за счет оттока и притока величин через границы этого объема.

Консервативная форма системы уравнений гидродинамики имеет разную форму записи в различных геометриях в силу того, что оператор дивергенции $\nabla \cdot$ и оператор градиента ∇ принимают различный вид в разных системах координат. Так, система уравнений в консервативных переменных для полярных координат записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r (\rho u_r^2 + p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_r u_\varphi) &= \\ &= \frac{\rho u_\varphi^2}{r} + \rho f_r, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_\varphi) + \nabla \cdot (\rho u u^T + p \hat{I}) &= f, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p)u) &= u f. \end{aligned}$$

МЕТОД MUSCL-HANCOCK

Впервые численный метод MUSCL был описан в работе [9]. Вскоре после этого выпускник Калифорнийского университета Стив Хэнкок значительно упростил метод в 1980 г. Схема MUSCL-Hancock — это MUSCL-схема, исполненная в виде предиктора-корректора.

Исходя из описания в работе [10], метод MUSCL-Hancock разделяется на пять шагов, описанных далее.

Первый шаг — перестроение линейного распределения параметров состояния. В качестве таких параметров могут использоваться консервативные ρ , ρu , E . Однако в методе MUSCL-Hancock лучше использовать простые параметры ρ , u , p . Обозначим этот набор символом W . Так как расчеты проводятся на равномерной сетке, нет необходимости учитывать изменения пространственных шагов Δr и $\Delta \varphi$. В этом случае для расчетов на первом шаге подходят следующие формулы:

$$\begin{aligned} \delta W_{i,j}^r &= \text{ave}(W_{i,j} - W_{i-1,j}, W_{i+1,j} - W_{i,j}), \\ \delta W_{i,j}^\varphi &= \text{ave}(W_{i,j} - W_{i,j-1}, W_{i,j+1} - W_{i,j}), \end{aligned}$$

где ave — функция-ограничитель. В программном комплексе используется функция minmod .

$$\min\text{mod}(a, b) = \begin{cases} \min(a, b), & a > 0, b > 0, \\ \max(a, b), & a < 0, b < 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Второй шаг — получение решений внутри ячеек в середине временного шага, на данном этапе применяются неконсервативные уравнения в простых переменных:

$$W_t + \frac{1}{r}(rA_w)W_r + \frac{1}{r}(B_w)W_\varphi = 0,$$

где A_w и B_w — матрицы коэффициентов:

$$A_w = \begin{pmatrix} u_r & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u_r & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u_r & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u_r \end{pmatrix},$$

$$B_w = \begin{pmatrix} u_\varphi & 0 & \rho & 0 \\ 0 & u_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_\varphi & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & u_\varphi \end{pmatrix},$$

Исходя из этого, шаг предиктора выглядит следующим образом:

$$\tilde{W}_{i,j} = W_{i,j} - \frac{\Delta t}{2\Delta r} A_w \delta W_{i,j}^r - \frac{1}{r} \frac{\Delta t}{2\Delta r} B_w \delta W_{i,j}^\varphi.$$

Третий шаг — рассчитываются значения величин между ячейками в середине временного шага:

$$\tilde{W}_{i-\frac{1}{2},j} = \tilde{W}_{i,j} - \frac{1}{2} \delta W_{i,j}^r,$$

$$\tilde{W}_{i+\frac{1}{2},j} = \tilde{W}_{i,j} + \frac{1}{2} \delta W_{i,j}^r,$$

$$\tilde{W}_{i,j-\frac{1}{2}} = \tilde{W}_{i,j} - \frac{1}{2} \delta W_{i,j}^\varphi,$$

$$\tilde{W}_{i,j+\frac{1}{2}} = \tilde{W}_{i,j} + \frac{1}{2} \delta W_{i,j}^\varphi.$$

Четвертый шаг — производится расчет значений потоков между ячейками в середине временного шага, для этого применяется решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва (точное либо приближенное):

$$\tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j} = F(\tilde{W}_{i-\frac{1}{2},j}, \tilde{W}_{i-\frac{1}{2},j}),$$

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j} = F(\tilde{W}_{i+\frac{1}{2},j}, \tilde{W}_{i+\frac{1}{2},j}),$$

$$\tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}} = F(\tilde{W}_{i,j-\frac{1}{2}}, \tilde{W}_{i,j-\frac{1}{2}}),$$

$$\tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}} = F(\tilde{W}_{i,j+\frac{1}{2}}, \tilde{W}_{i,j+\frac{1}{2}}).$$

В рамках программного комплекса использовалось приближенное решение задачи Римана по методу HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact). В соответствии с методом HLLC потоки физических величин рассчитываются по следующей формуле:

$$F_{HLLC} = \begin{cases} F_L, & S_L > 0, \\ \tilde{F}_L, & S_L \leq 0 \leq S_M, \\ \tilde{F}_R, & S_M \leq 0 \leq S_R, \\ F_R, & S_R < 0, \end{cases}$$

где \tilde{F}_L, \tilde{F}_R — промежуточные потоки физических величин, разделенные контактным разрывом, характеристические скорости определяются следующим образом:

$$S_M = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_R + p_L}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L},$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - u_R),$$

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + u_R),$$

а $c_L = \sqrt{\gamma \frac{p_L}{\rho_L}}, c_R = \sqrt{\gamma \frac{p_R}{\rho_R}}$ — значения скорости звука слева и справа от границы ячейки соответственно.

Пятый шаг является последним. Текущее состояние продвигается на один временной шаг, применяются значения потоков между ячейками, полученные на предыдущем шаге:

$$U^{i,j} = U_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta r} \left(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j} \right) - \frac{1}{r} \frac{\Delta t}{\Delta \varphi} \left(\tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}} \right).$$

На этом шаге также учитывается воздействие внешних сил на систему f .

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Программный комплекс основан на описанном выше методе и написан на языке программирования C++. На вход при расчетах подаются характеристики спирального гравитационного потенциала (угол закрутки спиралей, глубина неосесимметричной составляющей потенциала, угловая скорость вращения потенциала, количество спиралей), временной период, с которым нужно выводить промежуточные результаты, значение времени, при котором происходит завершение расчетного цикла, тип граничных условий, а также параметры расчетной области: радиальная длина расчетной области и число разбиений радиальной и азимутальной составляющей. После запуска комплекса выполняется этап инициализации массивов, в которых хранятся значения физических величин, определяющих состояние каждой ячейки в расчетной области, и заполнения их начальными значениями. Затем начинается выполнение расчетного цикла, который состоит из шагов численного метода. После завершения каждой итерации цикла выполняется пересчет значений гравитационного потенциала. С периодичностью, определенной во входных данных, выполняется операция вывода текущих значений в текстовые файлы (.txt).

Так как в расчетах используется явная численная схема, значения величин в ячейках на следующем временном слое вычисляются на основе параметров на текущем временном слое как самой ячейки, так и ее соседей. Поэтому, чтобы обеспечить корректный расчет крайних ячеек расчетной области, нужно добавить слой граничных ячеек. На каждом временном слое значения параметров определенной граничной ячейки высчитываются на основе значений соответ-

вующей крайней ячейки на том же временном слое. В случае полярной сетки таких границ у расчетной области только две (рис. 1): внутренняя граница, которая совпадает с центром системы координат, и внешняя. На рисунке зеленым показаны граничные ячейки, желтым – крайние ячейки расчетной области.

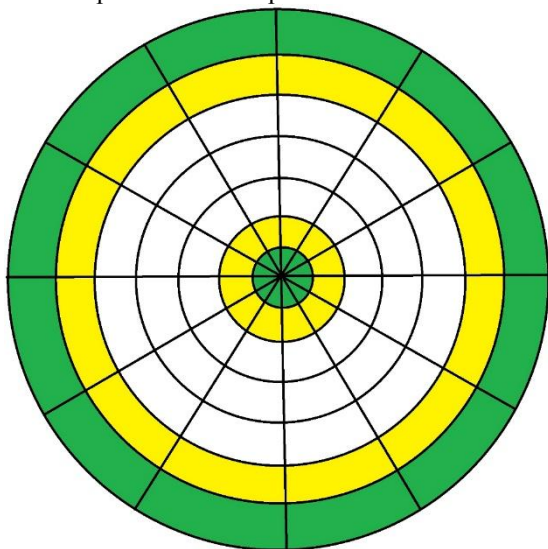


Рис. 1. Схема сетки расчетной области

В программном комплексе перед запуском расчетного цикла можно выбрать тип для каждой из границ. Это может быть открытая граница, когда все значения физических параметров граничной ячейки берутся такими же, как и значения в соответствующей крайней ячейке расчетной области. Другой вариант границы – «стенка», отличие которого от открытой границы состоит в том, что значение радиальной скорости для граничной ячейки берется с противоположным знаком. В вычислительных экспериментах, о которых будет рассказываться далее, внутренняя граница определяется как «стенка», а внешняя – как открытая.

Для компиляции исходного кода использовался компилятор Intel C++ Compiler. Данный выбор обусловлен поддержкой компилятором стандарта OpenMP 3.0. Директивы данного стандарта позволили распараллелить циклы, вычисляющие значения физических параметров в ячейках на шагах метода MUSCL-Hancock и, следовательно, повысить скорость расчетов на многоядерных процессорах.

Для оценки эффективности было проведено сравнение скорости выполнения расчетов многопоточной версии, реализованной с использованием OpenMP, и обычной реализации без использования технологии распараллеливания. Рассмотрим график зависимости среднего времени выполнения одной итерации расчетного цикла от числа разбиений радиальной составляющей расчетной области (рис. 2). Число разбиений азимутальной составляющей в данных численных экспериментах равнялось 360, число разбиений радиальной составляющей варьировалась от 50 до 1200,

оно отображено на оси абсцисс графика. На оси ординат отображено среднее время выполнения одной итерации расчетного цикла в секундах. Испытания проводились на компьютере, оснащенный четырехъядерным процессором Intel Core i7-4700MQ, каждое ядро которого имеет тактовую частоту 2.4 ГГц.

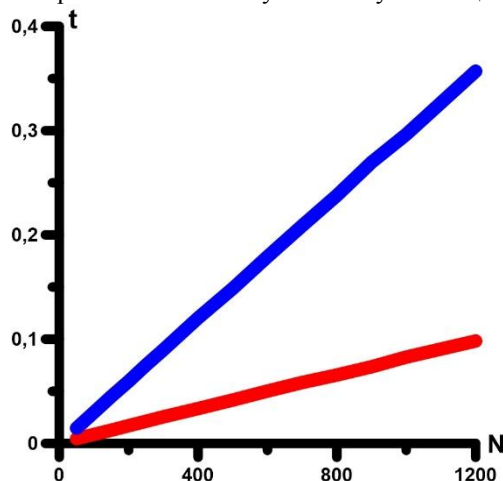


Рис. 2. График зависимости времени выполнения расчетного цикла от размера расчетной области

Как видно из графиков, в обеих реализациях время расчета линейно зависит от изменения числа разбиений одной из размерностей расчетной области. Также наблюдается примерно четырехкратное уменьшение времени выполнения многопоточной версии по сравнению с однопоточной.

ПРОВЕДЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Созданный программный комплекс далее использовался в серии вычислительных экспериментов, имевших целью исследование характерных черт в поведении ударных волн во вращающемся газодинамическом потоке, помещенном в спиральный гравитационный потенциал. Опираясь на работы [11 – 13], представим потенциал как сумму двух составляющих: осесимметричной Ψ_0 , которая обуславливается гало и осесимметричным распределением вещества в звездном диске, и неосесимметричной, связанной с волной плотности в звездном диске. Записывается потенциал следующим образом:

$$\Psi(r, \varphi) = \Psi_0(r)(1 + \varepsilon_0 \Psi_1(\xi_s) \cos \theta_p),$$

$$\Psi_1(\xi_s) = \frac{\xi_s^2}{(1 + \xi_s^2)^{3/2}},$$

где

$$\theta_p = m \left(\varphi - \frac{\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)}{tg(i)} \right),$$

$$\xi_s = \frac{r}{b},$$

m – количество спиралей, b – характерная радиальная шкала, θ_p – угловая скорость вращения спирального

узора, i – угол закрутки спиралей, ε_0 – величина, характеризующая глубину потенциальной ямы спиральной волны плотности. В расчетах далее брались безразмерные величины: $b = 1$, $r_0 = 0.9$.

Один из экспериментов проводился в целях исследования изменения поведения газодинамического потока при изменении угла закрутки спирального потенциала. На графиках (рис. 3) изображены значения логарифма плотности. Такой способ отображения дает возможность наглядно показать положение ударных волн в потоке газа. На графиках явно заметны выпрямленные сегменты на фронтах ударных волн, так называемые полигональные структуры. Также при увеличении угла закрутки спиралей заметен эффект гофрировочной неустойчивости, который проявляется в возмущениях мелких масштабов на ударных волнах. Подробно данные явления рассмотрены в работе [14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате был реализован программный комплекс, предназначенный для моделирования поведения вращающегося газа, находящегося в спиральном гравитационном потенциале. Программная реализация основана на численной схеме MUSCL-Hancock. Комплекс создан на языке программирования C++, для распараллеливания вычислительного процесса использовался стандарт создания многопоточных программ OpenMP.

Реализованный программный комплекс использовался для проведения серий вычислительных экспериментов, в которых показывал корректные результаты.

Полученный программный комплекс будет далее использоваться для исследования газодинамических течений в условиях спирального вращающегося потенциала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бутенко, М.А. Численное моделирование внешних газовых спиралей в галактиках / М.А. Бутенко, С.А. Хоперсков, А.В. Хоперсков // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2012. – № 1. – С. 49–56.
2. Фридман, А.М. Физика галактических дисков [Текст] / А.М. Фридман, А.В. Хоперсков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 640 с.
3. Спиральные волны газа и гравитирующей плазмы в неосимметричном гравитационном потенциале / А.В. Хоперсков [и др.] // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2007. – № 11. – С. 100–104.
4. Современные представления о спиральной структуре галактик / Ю.Н. Ефремов [и др.] // УФН. – 1987. – № 4. – С. 599–629.
5. Lin, C. C., and F. H. Shu, "On the spiral structure of disk galaxies," *Astron. J.*, vol. 140, pp. 646–655, 1964.
6. Kovalevko, I. G., and V. V. Levy, "Steady gas flow with a shock wave in a potential well," *Astron. Astrophys.*, vol. 264, pp. 406–414, 1992.
7. Засов, А.В. Общая астрофизика [Текст] / А.В. Засов, К.А. Поствов. – Фрязино, 2006. 496 с.
8. Тёмная материя в галактиках / А.В. Засов [и др.] // Успехи физических наук. – 2017. – Том 187. – № 1. – С. 3–44.
9. van Leer, B., "Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's methods," *Journal of Computational Physics*, vol. 32, pp. 101–136, 1979.
10. Toro E. F., *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
11. Cox, D. P., and G. C. Gomez "Analytical Expressions for Spiral Arm Gravitational Potential and Density," *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 142, pp. 261–267, 2002.
12. Shetty, R., and E. C. Ostriker "Global Modeling of Spur Formation in Spiral Galaxies," *The Astrophysical Journal*, vol. 647, pp. 997–1017, 2006.
13. Wada, K., and J. Koda "Multi-Phase Gas Dynamics in a Weak Barred Potential," *Publication of Astronomical Society of Japan*, vol. 53(6), pp. 1163–1170, 2001.
14. Полигональные структуры в газовом диске: численные эксперименты / С.А. Хоперсков [и др.] // Письма в астрономический журнал. – 2011. – Том 37. – №8. – С. 1–14.

Дорогинин Вячеслав Михайлович – студент магистратуры по специальности Программная инженерия, ФГАОУ ВО ВолГУ, тел. +79610828790.
e-mail: slavyandoroginin@gmail.com.

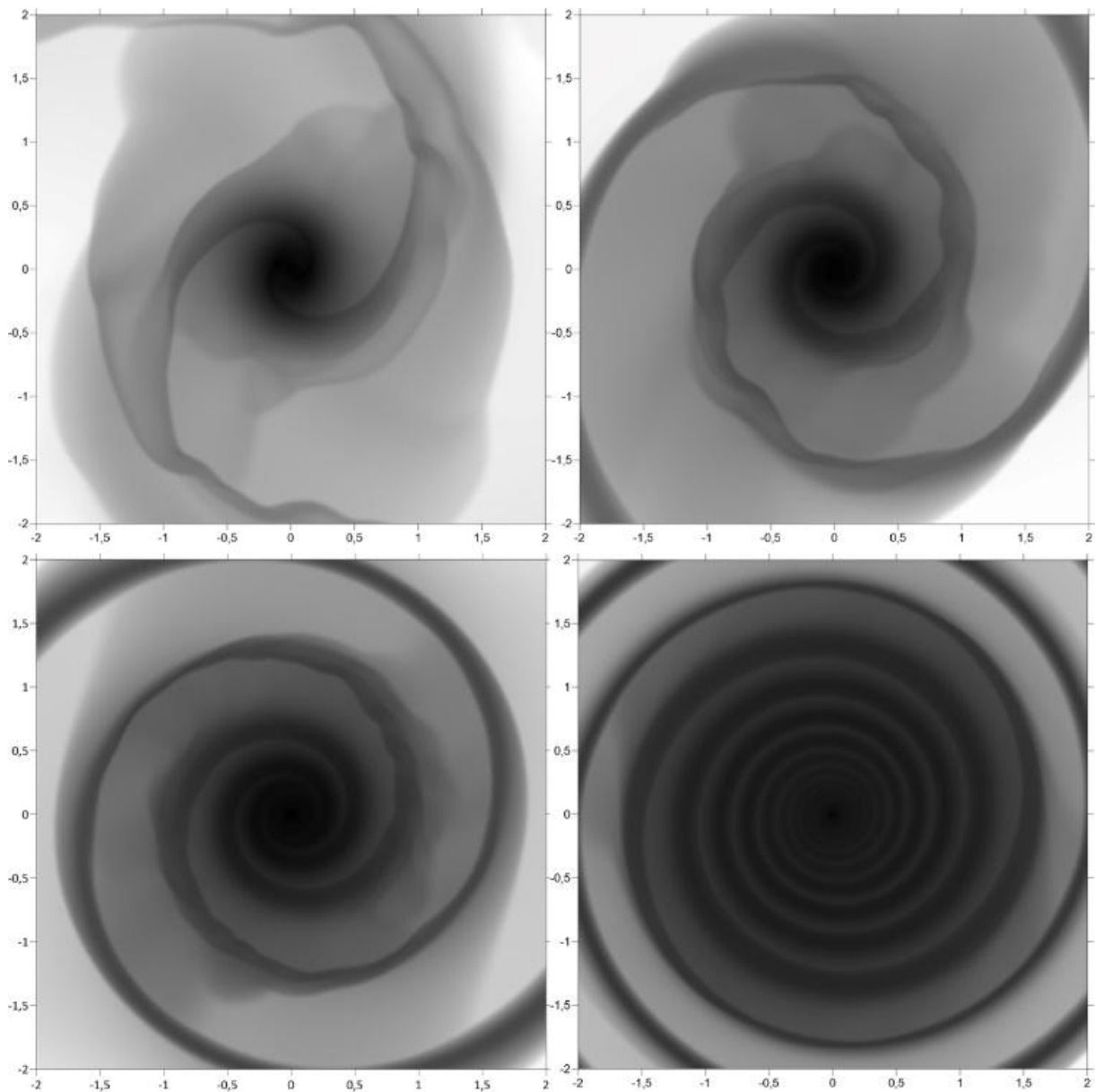


Рис. 3. Положения ударных волн при различных значениях угла закрутки $i = 30^\circ, 15^\circ$ (верхний ряд), $10^\circ, 5^\circ$ (нижний ряд).

DEVELOPMENT OF THE SOFTWARE PACKAGE FOR SIMULATION OF ROTATING GASDYNAMIC FLOWS IN THE EXTERNAL GRAVITATIONAL POTENTIAL

V. M. Doroginin

Volgograd State University, Volgograd

A software package for researching of behavioral traits of the rotating gas in the external gravitational potential that based on the MUSCL-Hancock numerical method was developed. In the article we present descriptions of the mathematical model and the numerical method underlying the implementation. There are given descriptions of the software implementation and used technologies. There are performed the researches of the features of the shockwaves formations in conditions of the spiral gravitational potential, results of this researches are given.

Index terms: numerical method, MUSCL-Hancock, gasdynamic flows, gravitational potential.

REFERENCES

1. Butenko, M. A., S. A. Khoperskov, and A.V. Khoperskov "The numerical simulation of external gas spirals," *The Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*, no. 1, pp. 49—56, 2012.
2. Fridman A. M., and A. V. Khoperskov A.V. *Fizika galakticheskikh diskov* (Physics of galactic disks), Moscow: Fizmatlit, 2011.
3. Khoperskov, A. V., M. A. Eremin, S. S. Khrapov, and A. G. Morozov "The spiral waves of gas and gravitating plasma in a nonsymmetric gravitational potential," *The Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*, no. 11, pp. 100—104, 2007.
4. Efremov, Yu. N., V. I. Korchagin, L. S. Marochnik, and A. A. Suchkov "The modern view of the nature of the spiral structure of galaxies," *Sov. Phys. Usp.*, no. 32, pp. 310—327, 1989.
5. Lin, C. C., and F. H. Shu, "On the spiral structure of disk galaxies," *Astron. J.*, vol. 140, pp. 646—655, 1964.
6. Kovalenko, I. G., and V. V. Levy, "Steady gas flow with a shock wave in a potential well," *Astron. Astrophys.*, vol. 264, pp. 406—414, 1992.
7. Zasov, A. V., and K. A. Postnov *Obschaya astrofizika* (The general astrophysics), Fryazino, 2006.
8. Zasov, A. V., A. S. Saburova, A. V. Khoperskov, and S. A. Khoperskov "Dark matter in galaxies," *Physics-Uspexhi*, vol. 187, no. 1, pp. 3—44, 2017.
9. van Leer, B., "Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's methods," *Journal of Computational Physics*, vol. 32, pp. 101—136, 1979.
10. Toro E. F., *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
11. Cox, D. P., and G. C. Gomez "Analytical Expressions for Spiral Arm Gravitational Potential and Density," *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 142, pp. 261—267, 2002.
12. Shetty, R., and E. C. Ostriker "Global Modeling of Spur Formation in Spiral Galaxies," *The Astrophysical Journal*, vol. 647, pp. 997—1017, 2006.
13. Wada, K., and J. Koda "Multi-Phase Gas Dynamics in a Weak Barred Potential," *Publication of Astronomical Society of Japan*, vol. 53(6), pp. 1163—1170, 2001.
14. Khoperskov, S. A., A. V. Khoperskov, M. A. Eremin, and M. A. Butenko "Polygonal structures in a gas disk: numerical experiments," *Astronomy Letters*, vol. 37, no. 8, pp. 1—14, 2011.

Doroginin Vyacheslav Mikhailovich – Master of Arts in Software Engineering, Volgograd State University, +79610828790, e-mail: slavyandoroginin@gmail.com.