

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.Н. Блазнов<sup>1</sup>, А.С. Зубков<sup>2</sup>, А.С. Кротов<sup>3</sup>, В.В. Самойленко<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем химико-энергетических технологий Сибирского отделения Российской академии наук, г. Бийск

<sup>2</sup> ООО «ЭЛЕКТРОМАШ», г. Новосибирск,

<sup>3</sup> Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Работа направлена на решение задачи моделирования характеристик композиционных материалов для уменьшения габаритов стойки опор ЛЭП при сохранении (либо повышении) модуля упругости при изгибе. Модель позволяет, варьируя входные параметры: тип ровинга (базальтовый или стеклянный), схему намотки, количество слоев, параметры исходных компонент: модули упругости, модули сдвига, коэффициенты Пуассона волокон и связующего (матрицы), коэффициент армирования, получить наилучшие оценки модулей упругости вдоль  $E_{\alpha}$  и поперек  $E_{\beta}$  трубы, модуля сдвига в плоскости армирования стенки трубы  $G_{\alpha\beta}$ . Для проверки модели были изготовлены образцы многослойных труб – макетов стойки опор диаметром 110 мм толщиной 5-6 мм из базальтового и стеклянного ровинга. При намотке труб реализованы для каждого вида ровинга по 5 схем армирования, включая продольно-поперечную намотку, с чередованием слоев под углом  $90^{\circ}$  и  $5^{\circ}$ , спиральную намотку под углом  $30^{\circ}$  и  $60^{\circ}$  к оси трубы и их комбинации (спирально-продольная и спирально-продольно-поперечная намотки). Для каждой схемы армирования проведены неразрушающие нагружения трехточечным поперечным изгибом труб на базе 1964, 1500, 1020, 808 мм и определены экспериментальные значения модуля упругости. Получены сопоставимые значения жесткости стекло- и базальтопластиковых труб. Наибольший модуль упругости обеспечивает продольно-поперечная намотка, наименьший – спиральная. Экспериментальные данные соответствуют рассчитанным по модели, при решении обратной задачи, с отклонением до 4,4 %.

*Ключевые слова:* математическая модель; модуль упругости; прочность; стеклопластик. базальтопластик; стойка опоры ЛЭП; композитные материалы.

## ВВЕДЕНИЕ

Перспективным направлением использования композитных материалов (КМ) является их применение для изготовления опор ЛЭП. Такие опоры уже прошли апробацию и в перспективе могут конкурировать с металлическими, железобетонными и деревянными опорами [1].

Лёгкие опоры из композитных материалов, обладающие меньшей удельной массой по сравнению с металлическими, определяют особую область применения строительства и эксплуатации высоковольтных линий в условиях труднодоступных мест (лесная, болотистая и горная местность), городской застройки, а также создания быстромонтируемого аварийного резерва. Конструкция стойки из композитных материалов выполняется из модулей в виде составных усечённых конусов различных типоразмеров. Разработаны несколько типов модулей, позволяющих собрать стойки необходимой высоты опоры ВЛ [1].

Применение композитных опор модульного типа предполагает значительное уменьшение транспортных габаритов и как следствие упрощение и удешевление логистики и монтажа, снижение затрат на доставку опор к месту установки. Прочностные характеристики композитов, а также их стойкость к окружающей среде позволяют обеспечить увеличение срока эксплуатации и снизить расходы на обслужива-

ние и ремонт. Кроме того, за счет сближения фаз и снижения волнового сопротивления, повышается пропускная способность ВЛ и, как следствие, уменьшение требуемого землеотвода.

Модули стойки опоры воспринимают на себя основную механическую нагрузку, и выбор материала и способа намотки при изготовлении модулей композитных опор имеет огромное значение. Перспективными материалами для изготовления опор ВЛЭП методом мокрой намотки являются стекло- и базальтопластики.

По типу укладки армирующих волокон различаются несколько методов намотки материала на оправки: прямая (окружная), спирально-винтовая (тангенциальная, кольцевая), спирально-перекрестная (спирально-продольная, спирально-поперечная), совмещенная спирально-кольцевая, продольно-поперечная, косослойная продольно-поперечная, планарная (полусная, орбитальная, плоскостная), тетранамотка, зональная намотка [1, 2]. Интерес представляет изучение влияния различных схем намотки на упруго-прочностные характеристики композитных опор и управление свойствами в процессе намотки.

Цель работы: моделирование характеристик КМ для уменьшения габаритов стойки опор ЛЭП при сохранении (либо улучшении) эксплуатационных характеристик конечного продукта (модуль упругости при изгибе). При планировании эксперимента: варьи-

рование типом материала (стеклопластик, базальтопластик), массовой долей наполнителя (армирующего волокна), схемой армирования (0°, +/-30°, +/-60°, 90° к оси модуля стойки опоры), длиной модуля.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Исходные данные: тип ровинга (базальт и стекло); требуемая деформативность модуля стойки опоры (задаются изгибающая и сжимающая сила, а также допустимое отклонение от вертикали).

Выходные параметры: способ намотки, угол армирования, количество слоев; модуль упругости; прочность вдоль и поперек трубы.

Геометрия задачи представлена на рис. 1. Задаваемые величины:  $L$  – длина трубы, мм;  $D$  – внешний диаметр трубы, мм (определяется в ходе поиска оптимального количества слоев КМ);  $d$  – внутренний диаметр трубы, мм;  $h$  – высота приложения сил, мм,  $f$  – максимальный допустимый прогиб трубы, мм;  $N$  – сжимающая сила, кН;  $Q$  – изгибающая сила, кН.

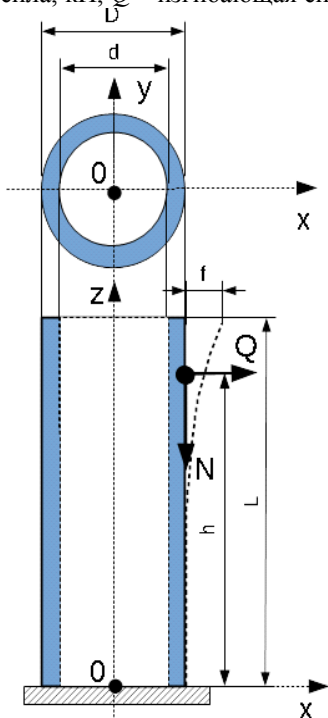


Рис. 1. Геометрия задачи

Согласно работам [3-6], можно построить следующую модель (рис.2).

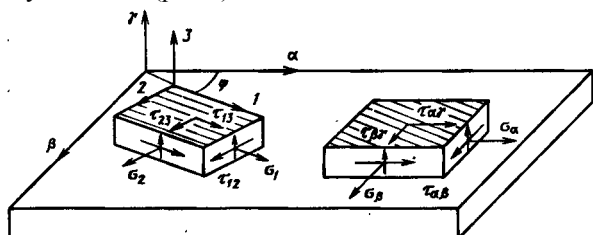


Рис. 2. Элемент однонаправленного слоя композита

Предположим, что элемент слоя находится в условиях плоского напряженного состояния. Поскольку оси координат 1, 2 являются осями ортотропии, закон Гука для слоя может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \bar{E}_1(\epsilon_1 + \nu_{12}\epsilon_2), \\ \sigma_2 &= \bar{E}_2(\epsilon_2 + \nu_{21}\epsilon_1), \\ \tau_{12} &= G_{12}\gamma_{12}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\bar{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \bar{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

где  $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$  – деформации в направлениях 1, 2 и плоскости 12, соответственно,  $E_1, E_2$  и  $G_{12}$  – модули упругости в направлениях 1, 2 и модуль сдвига в плоскости слоя,  $\nu_{12}, \nu_{21}$ , – коэффициенты Пуассона.

Эффективные жесткостные характеристики однонаправленного композитного материала можно вычислить по последующим формулам:

$$E_1 = \mu E_f + (1 - \mu) E_m, \tag{2}$$

$$E_2 \approx \frac{E_f E_m}{\mu E_m + (1 - \mu) E_f} \tag{3}$$

Для модуля сдвига в плоскости армирования имеем аналогичную по структуре формулу

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_f(1 + \mu) + G_m(1 - \mu)}{G_m(1 + \mu) + G_f(1 - \mu)} G_m, \tag{4}$$

где модули сдвига изотропных волокна и связующего определяются выражениями:

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}. \tag{5}$$

Коэффициенты Пуассона однонаправленного материала рассчитывают по выражениям:

$$\nu_{12} = \mu \nu_f + (1 - \mu) \nu_m, \quad \nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1}. \tag{6}$$

Модуль поперечных сдвигов:

$$G_{23} = \frac{G_f G_m}{\mu G_m + (1 - \mu) G_f} \tag{7}$$

Здесь  $E_f, E_m$  – модули упругости,  $G_f, G_m$  – модули сдвига,  $\nu_f, \nu_m$  – коэффициенты Пуассона волокон ( $f$ ) и связующего (матрицы) ( $m$ ),  $\mu$  – коэффициент армирования.

Рассмотрим композиционный материал, состоящий из  $K$  однонаправленных слоев с толщиной отдельного слоя  $t_k$  и углом армирования  $\phi_k$ . Ось  $\alpha$  направлена вдоль оси трубы,  $\beta$  – поперек,  $\gamma$  – трансверсально плоскости армирования (рис. 3).

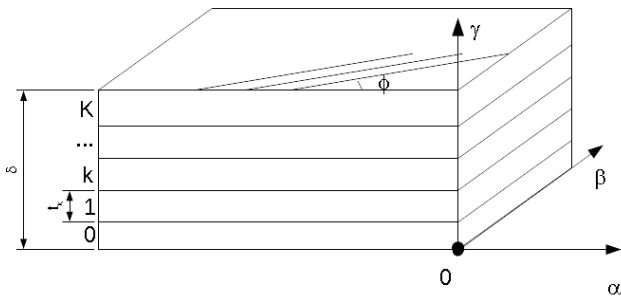


Рис. 3. Координаты слоев

Физические соотношения для слоистого материала можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= B_{11}\varepsilon_\alpha + B_{12}\varepsilon_\beta + B_{13}\gamma_{\alpha\beta}, \\ \sigma_\beta &= B_{21}\varepsilon_\alpha + B_{22}\varepsilon_\beta + B_{23}\gamma_{\alpha\beta}, \\ \tau_{\alpha\beta} &= B_{31}\varepsilon_\alpha + B_{32}\varepsilon_\beta + B_{33}\gamma_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = B_{44}\gamma_{\alpha\gamma}, \quad \tau_{\beta\gamma} = B_{55}\gamma_{\beta\gamma}, \quad (9)$$

где

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^K \left( \frac{t_k}{\delta} A_{ij}^k \right), \quad i, j = 1..5 \quad (10)$$

где  $A_{ij}^k$  определяется системой уравнений для каждого  $k$ -го слоя (параметр  $k$  опущен):

$$\begin{aligned} A_{11} &= \bar{E}_1 \cos^4 \varphi + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ A_{22} &= \bar{E}_1 \sin^4 \varphi + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ A_{12} &= A_{21} = \bar{E}_1 \nu_{12} + [\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + 2(\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ A_{13} &= A_{31} = [\bar{E}_1 \cos^2 \varphi - \bar{E}_2 \sin^2 \varphi - (\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12})] \cos 2\varphi, \\ A_{23} &= A_{32} = [\bar{E}_1 \sin^2 \varphi - \bar{E}_2 \cos^2 \varphi + (\bar{E}_1 \nu_{12} + 2G_{12})] \cos 2\varphi, \\ A_{33} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \nu_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos 2\varphi, \\ A_{44} &= G_{13} \cos^2 \varphi + G_{23} \sin^2 \varphi, \\ A_{55} &= G_{13} \sin^2 \varphi + G_{23} \cos^2 \varphi, \\ A_{45} &= A_{54} = (G_{13} - G_{23}) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

$\delta = \sum_{k=1}^K t_k = \frac{1}{2}(D - d)$  – толщина стенки трубы как сумма толщин слоев;  $\sigma$  – напряжения всех слоев участка стенки трубы;  $\varepsilon, \gamma$  – деформации всех слоев участка стенки трубы.

Приведенные соотношения можно представить в форме, разрешенной относительно средних деформаций пакета:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \mu_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \eta_{\alpha,\alpha\beta} \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}, \\ \varepsilon_\beta &= -\mu_{\beta\alpha} \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \eta_{\beta,\alpha\beta} \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta,\alpha} \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \eta_{\alpha\beta,\beta} \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $E_\alpha = \frac{B}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}$  – модуль упругости вдоль оси трубы;

$E_\beta = \frac{B}{B_{11}B_{33} + B_{13}^2}$  – модуль упругости поперек оси трубы;

$G_{\alpha\beta} = \frac{B}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}$  – модуль сдвига в плоскости армирования стенки трубы;

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}; \quad \mu_{\beta\alpha} = \frac{B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2} -$$

коэффициенты Пуассона;

$$\eta_{\alpha,\alpha\beta} = \frac{B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}; \quad \eta_{\beta,\alpha\beta} = \frac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2};$$

$$\eta_{\alpha\beta,\alpha} = \frac{B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}; \quad \eta_{\alpha\beta,\beta} = \frac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2};$$

$$B = B_{33}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) + 2B_{12}B_{13}B_{23} - B_{11}B_{23}^2 - B_{22}B_{13}^2$$

Для материала с симметричной структурой коэффициенты  $B_{13} = B_{31} = B_{23} = B_{32} = 0$ . Модули упругости и коэффициенты Пуассона в этом случае определяются формулами

$$\begin{aligned} E_\alpha &= B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}}; \quad E_\beta = B_{22} - \frac{B_{12}^2}{B_{11}}; \\ \mu_{\alpha\beta} &= \frac{B_{12}}{B_{11}}; \quad \mu_{\beta\alpha} = \frac{B_{12}}{B_{22}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, варьируя входные параметры: тип ровинга, схему намотки, количество слоев, параметры исходных компонент: модули упругости, модули сдвига, коэффициенты Пуассона волокон и связующего (матрицы), коэффициент армирования, можно получить наилучшие оценки модулей упругости вдоль  $E_\alpha$  и поперек  $E_\beta$  трубы, модуля сдвига в плоскости армирования стенки трубы  $G_{\alpha\beta}$ .

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Для проверки модели были изготовлены образцы многослойных труб – макетов стойки опор [1, 2]:

- 5 труб из базальтопластика (B1-B5) с разной схемой армирования внутренним диаметром 110 мм толщиной 5-6 мм длиной 2 м, на основе базальтового ровинга VCF 17-2520-KV12 int;

- 5 труб из стеклопластика (C1-C5) с разной схемой армирования внутренним диаметром 110 мм толщиной 5-6 мм длиной 2 м, на основе стеклянного ровинга EC 17-1200-35.

Режимы отверждения стандартные (при вращении на оправке). Наружный слой на всех вариантах кольцевой (для утягивания). Количество слоев определялось технологически, чтобы набрать заданную толщину трубы. В табл. 1 представлены геометрические характеристики исследованных труб.

При расчете величины модуля и напряжений по экспериментальным данным использовали следующие выражения.

Модуль упругости при изгибе определяли по формуле [7]:

$$E = \frac{Pz(4z^2 - 3L^2)}{48fJ_x},$$

где  $P$  (кН) - сосредоточенная сила, приложенная в центре трубы,  $L$  (мм) - длина базы,  $f$  (мм) - прогиб в точке  $z$ ,  $J_x$  (мм<sup>4</sup>) - момент инерции кольца.

Максимальное нормальное и касательное напряжение при изгибе находили по выражениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x}, \tau_{max} = \frac{\sigma_{max}}{2} \frac{D}{L},$$

где  $M_{max} = \frac{PL}{4}$  - максимальный момент силы, кН·мм

В табл. 2 приведены результаты расчета.

Согласно работе [7], прогиб трубы можно представить в виде

$$f_{max} = \frac{PL^3}{48EJ_x} \left( 1 + \alpha \left( \frac{D}{L} \right)^2 \frac{E}{G} \right) \quad (15)$$

где  $E_{ист}$  - модуль упругости при изгибе (ГПа),  $G_{сд}$  - модуль сдвига (ГПа),  $\alpha$  - параметр, зависящий от вида сечения.

Табл. 1. Геометрические характеристики труб на базе L=1964 мм

Обозначение	Тип намотки	D, мм	d, мм	s, мм	h <sub>p</sub> , мм	h <sub>f</sub> , мм	A, мм <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> ×10 <sup>6</sup> , мм <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> ×10 <sup>4</sup> , мм <sup>3</sup>
C1	ПП	122,88	110	6,44	982	937	2354,8	4,00	6,52
C2	СП	121,83	110	5,91	982	937	2153,0	3,62	5,95
C3	СПП	123,40	110	6,70	982	937	2456,4	4,20	6,80
C4	С	121,63	110	5,81	982	937	2114,8	3,56	5,85
C5	С	121,32	110	5,66	982	937	2057,6	3,45	5,69
B1	ПП	122,43	110	6,21	982	937	2268,1	3,84	6,27
B2	СП	124,08	110	7,04	982	937	2587,6	4,45	7,17
B3	СПП	124,05	110	7,02	982	937	2582,7	4,44	7,15
B4	С	121,98	110	5,99	982	937	2181,8	3,68	6,03
B5	С	123,10	110	6,55	982	937	2398,3	4,09	6,64

Примечание: С – спиральная намотка под углом 30° (C4, B4) и 60° (C5, B5);  
 ПП – продольно-поперечная намотка, с чередованием слоев под углом 90° и 5° к оси трубы;  
 СП – спирально-продольная намотка, с чередованием слоев под углом 30° и 5° к оси трубы;  
 СПП – спирально-продольно-поперечная намотка, с чередованием слоев под углом 30°, 5° и 90° к оси трубы; s – толщина стенки трубы, h<sub>p</sub> – точка приложения силы ровно посередине между опорами, h<sub>f</sub> – точка измерения прогиба, A, J<sub>x</sub>, W<sub>x</sub> – площадь сечения, момент инерции и момент сопротивления кольца

Табл. 2. Упруго-прочностные характеристики труб

L, мм	Данные	В (базальтопластик, 110 мм)					В Итог	С (стеклопластик, 110 мм)					С Итог
		B1	B2	B3	B4	B5		C1	C2	C3	C4	C5	
808	E1avg	22,54	23,65	24,10	24,91	14,40	21,92	24,43	26,80	26,43	25,87	15,20	23,75
	E1std	1,85	1,16	1,51	2,09	0,81	1,48	1,38	1,71	1,30	1,18	1,40	1,40
	E2avg	21,91	28,30	22,97	24,40	14,67	22,45	29,42	26,20	26,12	27,82	17,09	25,33
	E2std	1,56	2,26	1,92	1,10	1,03	1,58	1,03	1,73	1,70	2,85	1,31	1,72
	σ <sub>1max</sub>	32,2	28,2	28,2	33,5	30,4	30,5	31,0	33,9	29,7	34,6	35,5	32,9
	τ <sub>1max</sub>	2,4	2,2	2,2	2,5	2,3	2,3	2,4	2,6	2,3	2,6	2,7	2,5
1020	E1avg	24,32	26,67	27,07	22,89	14,71	23,13	30,77	30,17	30,53	26,21	15,19	26,58
	E1std	1,40	3,20	2,17	1,47	1,29	1,91	2,70	2,27	2,09	1,44	1,45	1,99
	E2avg	27,79	26,06	28,53	24,84	14,41	24,33	30,18	33,57	30,84	24,05	15,08	26,74
	E2std	1,87	3,38	2,04	1,17	0,91	1,87	2,32	2,31	1,78	1,10	1,67	1,84
	σ <sub>1max</sub>	40,6	35,6	35,6	42,3	38,4	38,5	39,1	42,8	37,5	43,6	44,9	41,6
	τ <sub>1max</sub>	2,4	2,2	2,2	2,5	2,3	2,3	2,4	2,6	2,3	2,6	2,7	2,5
1500	E1avg	27,89	24,43	25,75	22,86	13,54	22,89	31,16	30,37	28,09	23,30	14,44	25,47
	E1std	2,67	1,92	1,32	1,40	1,30	1,72	1,48	1,20	1,45	1,58	1,07	1,35
	E2avg	27,09	25,08	26,25	23,45	13,24	23,02	30,01	30,69	28,34	24,00	14,84	25,58
	E2std	1,42	1,14	0,56	1,53	1,53	1,24	2,33	1,46	1,78	1,40	1,32	1,66
	σ <sub>1max</sub>	59,8	52,3	52,4	62,2	56,5	56,6	57,6	63,0	55,1	64,2	66,0	61,2
	τ <sub>1max</sub>	2,4	2,2	2,2	2,5	2,3	2,3	2,4	2,6	2,3	2,6	2,7	2,5
1964	E1avg	27,31	25,33	26,94	24,88	13,76	23,64	36,84	28,22	26,74	23,31	15,47	26,12
	E1std	0,82	1,27	1,27	3,52	0,49	1,47	8,78	1,51	4,35	1,47	1,21	3,46
	E2avg	28,88	24,00	26,15	23,45	13,22	23,14	36,26	25,09	27,78	23,60	15,25	25,60
	E2std	0,84	3,17	0,84	0,59	2,16	1,52	5,26	3,88	0,98	2,07	0,89	2,62
	σ <sub>1max</sub>	78,3	68,5	68,6	81,4	74,0	74,2	75,4	82,5	72,2	84,0	86,4	80,1
	τ <sub>1max</sub>	2,4	2,2	2,2	2,5	2,3	2,3	2,4	2,6	2,3	2,6	2,7	2,5

Итого E1avg	25,51	25,02	25,96	23,88	14,10	22,90	30,80	28,89	27,95	24,67	15,08	25,48
Итого E1std	1,68	1,89	1,57	2,12	0,97	1,65	3,58	1,67	2,30	1,42	1,28	2,05
Итого E2avg	26,42	25,86	25,98	24,04	13,89	23,24	31,47	28,89	28,27	24,87	15,56	25,81
Итого E2std	1,42	2,49	1,34	1,10	1,41	1,55	2,74	2,35	1,56	1,85	1,30	1,96
Итого $\sigma_{1max}$	52,7	46,1	46,2	54,8	49,8	50,0	50,8	55,6	48,6	56,6	58,2	53,9
Итого $\tau_{1max}$	2,4	2,2	2,2	2,5	2,3	2,3	2,4	2,6	2,3	2,6	2,7	2,5

Примечание. E1avg - средний модуль упругости для плоскости 0° и его ошибка E1std, ГПа;  
E2avg - средний модуль упругости для плоскости 90° и его ошибка E2std, ГПа;  
 $\sigma_{1max}$ ,  $\tau_{1max}$  - максимальные нормальное и касательное напряжения, МПа

Модель (15) позволяет описать единым образом весь эксперимент, включающий все длины труб для каждого типа намотки. На рис. 4 представлены зависимости прогиба от нагрузки для двух типов труб на

всех базах (точки – эксперимент, сплошные линии – модель (15), пунктирные линии – разность между экспериментом и моделью). Угол наклона линии растет с ростом длины базы.

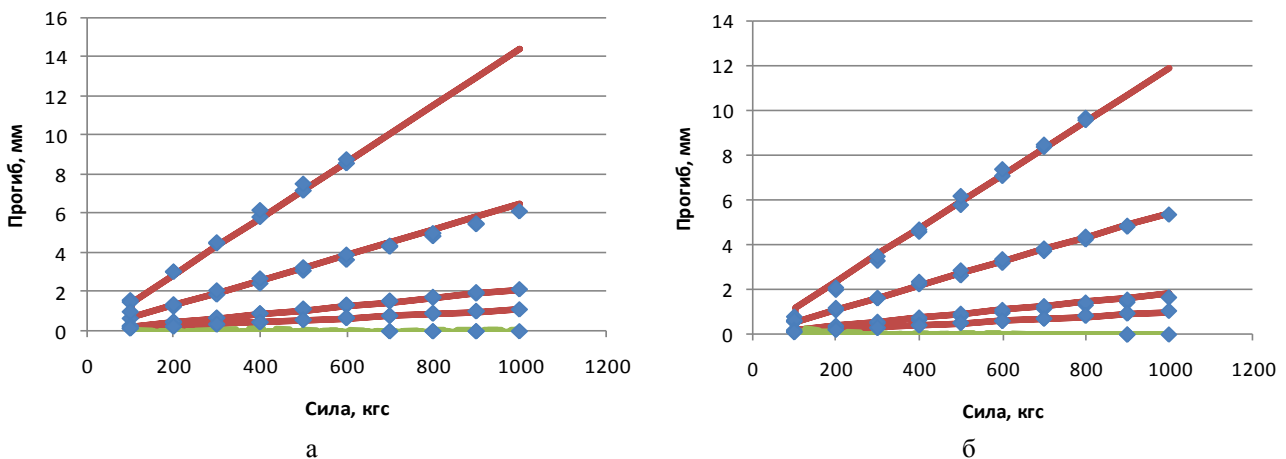


Рис. 4. Прогиб трубы В1 (а) и С1 (б), при длине (сверху вниз): 1964, 1500, 1020, 808 мм

Применение модели конструирования пакета слов с исходными значениями параметров  $E_f$ ,  $E_m$ ,  $G_f$ ,  $G_m$ ,  $\nu_f$ ,  $\nu_m$ , из справочника [4] (табл. 3), продемонстрировано на примере длины  $L = 1964$  мм, при коэффициенте армирования  $\mu = 0,8$ . Данные расчета и эксперимента приведены в табл. 4.

Табл. 3. Входные параметры

Компонент	E, ГПа	$\nu$	G, ГПа
Базальтовое волокно	80,0	0,25	32,0
Стекловолокно	81,5	0,25	32,6
Эпоксидное связующее	3,3	0,3	1,27

Табл. 4. Сопоставление модели и проверочного эксперимента

Модель (табл. 3)	V1	V2	V3	V4	V5	C1	C2	C3	C4	C5
$E_a$ , ГПа	25,86	39,46	32,32	29,62	15,27	27,51	42,37	28,69	29,25	15,26
$E_b$ , ГПа	5,66	8,64	7,08	6,49	3,35	5,93	9,14	6,19	6,31	3,29
$\sigma_a$ , ГПа	1,07	1,34	1,12	0,73	0,34	1,18	1,45	1,00	0,75	0,36
$\sigma_b$ , ГПа	0,05	0,50	0,42	0,96	0,89	0,06	0,64	0,48	1,00	0,94
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	2386	2386	2386	2386	2386	2282	2282	2282	2282	2282
$m$ , кг	25,56	17,67	21,55	25,56	21,55	15,08	13,29	13,29	9,80	9,80
Эксперимент (табл. 2)	V1	V2	V3	V4	V5	C1	C2	C3	C4	C5
E1avg, ГПа	27,31	25,33	26,94	24,88	13,76	36,84	28,22	26,74	23,31	15,47
E1std, ГПа	0,82	1,27	1,27	3,52	0,49	8,78	1,51	4,35	1,47	1,21
Погрешность	V1	V2	V3	V4	V5	C1	C2	C3	C4	C5
dE=E1avg-Ea, ГПа	1,45	-14,13	-5,38	-4,74	-1,52	9,32	-14,16	-1,95	-5,94	0,22
rE=dE/E1avg, %	5,3	55,8	20,0	19,1	11,0	25,3	50,2	7,3	25,5	1,4

Примечание.  $E_a$ ,  $E_b$  - модуль упругости вдоль и поперек трубы, рассчитываемый по выражению (14);  
 $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  - прочность вдоль и поперек трубы, рассчитываемая по выражению (8);  $\rho$  - плотность композита;  
 $m$  - масса трубы длины  $L=1964$  мм;  $dE$  - абсолютная ошибка,  $rE$  - относительная ошибка

Если решить обратную задачу, где на входе экспериментальные значения модуля упругости при трехточечном изгибе (табл. 2), то можно найти оценки входных параметров ( $E_f$ ,  $E_m$ ,  $G_f$ ,  $G_m$ ,  $\nu_f$ ,  $\nu_m$ ,  $\mu$ ), под-

ставить в итоговую модель и получить оценки модуля упругости материала из эксперимента. Результаты расчетов приведены в таблицах 5 и 6.

Табл. 5. Результаты решения обратной задачи

Var	B1	B2	B3	B4	B5	C1	C2	C3	C4	C5
E1avg	27,31	25,33	26,94	24,88	13,75	36,84	28,22	26,74	23,31	15,47
dE1, %	3	5	5	14	4	24	5	16	6	8
Em1, ГПа	25,86	39,46	32,32	29,62	15,27	27,51	42,37	28,69	29,25	15,26
dEm1, %	5	56	20	19	11	25	50	7	25	1
Em2, ГПа	25,51	25,63	25,99	28,27	14,19	36,89	34,85	29,01	18,67	12,16
dEm2, %	7	1	3	14	3	0	24	9	20	21

Примечание. Var – описание; E1avg – эксперимент; dE1 – относительная ошибка эксперимента; Em1 – модель 1 с входными параметрами из табл. 3; dEm1 – относительная ошибка первой модели; Em2 – модель 2 с параметрами, найденными из эксперимента (табл. 2); dEm2 – относительная ошибка второй модели

Табл. 6. Входные параметры

Компонент	E, ГПа	$\nu$	G, ГПа
Базальтовое волокно	61,55	0,12	27,51
Стекловолокно	50,68	0,36	18,58
Эпоксидное связующее	4,89	0,19	2,06

Во всех случаях коэффициент армирования  $\mu=0,8$ .

В табл.7 собраны общие результаты применения модели (1-14) при использовании справочных данных - Модель 1 (табл.3) и после решения обратной задачи - Модель 2 (табл.6).

Табл. 7. Общие результаты моделирования

Параметры	Модель 1	Модель 2
Невязка	1332,426	117,041
Средняя ошибка, %	14,902	4,417
R <sup>2</sup> коэффициент детерминации	0,669	0,871

По данным таблицы 7 можно заключить, что при решении обратной задачи (по модели 2) получена более высокая сходимость экспериментальных и расчетных данных.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построена модель зависимости модуля упругости и прочности от характеристик компонент композиционного материала: Ef, Em – модулей упругости, Gf, Gm – модулей сдвига,  $\nu_f$ ,  $\nu_m$  – коэффициентов Пуассона волокон (f) и связующего (матрицы) (m),  $\mu$  – коэффициента армирования.

2. Произведена математическая обработка эксперимента на трехточечный изгиб на базе 1964, 1500, 1020, 808 мм для базальтопластиковых и стеклопластиковых труб с разной схемой армирования.

3. Наибольший модуль упругости  $31,15 \pm 3,6$  ГПа получен для трубы на основе стеклянных ровингов, с продольно-поперечной схемой намотки.

4. Наибольшие нормальные и касательные напряжения ( $\sigma=57,4$  МПа,  $\tau=2,6$  МПа) наблюдаются у образцов стекло- и базальтопластиковых труб со спиральной схемой намотки под углом  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , при этом модуль упругости наименьший: EB =  $18,98 \pm 1,5$  ГПа, EC =  $20,0 \pm 1,5$  ГПа.

5. Средний измеренный модуль упругости у труб из стеклянного ровинга больше, чем из базальтового: EC= $25,64 \pm 2,1$  ГПа против EB= $23,07 \pm 1,6$  ГПа.

6. Для проверочной партии труб были проведены сравнения рассчитанных по модели и экспериментальных значений модуля упругости вдоль трубы при нагружении трехточечным изгибом на базе L=1964 мм. Средняя относительная погрешность модели составила 14,9 %. Решая обратную задачу по нахождению входных параметров, погрешность модели снижена до 4,4 %.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Блазнов, А.Н. Исследование различных схем намотки изделий на основе базальтового и стеклянного ровингов [электронный ресурс] / А.Н. Блазнов, Н.Н. Ходакова, В.В. Самойленко, С.С. Гребнев, И.А. Родионов, А.А. Краснов // Южно-Сибирский научный вестник. – 2016. – № 4. – С. 10-16. / Режим доступа: [http://s-sibsb.ru/images/articles/2016/4/2\\_10-16.pdf](http://s-sibsb.ru/images/articles/2016/4/2_10-16.pdf)
- Ходакова, Н.Н. Влияние схемы намотки на формирование механических свойств изделий из композитов в продольном и поперечном направлении ровингов [электронный ресурс] / Н.Н. Ходакова, А.Н. Блазнов, В.В. Самойленко, А.С. Краснова, С.С. Гребнев, И.А. Родионов // Южно-Сибирский научный вестник. – 2016. – № 4. – С. 17-25. / Режим доступа: [http://s-sibsb.ru/images/articles/2016/4/3\\_17-25.pdf](http://s-sibsb.ru/images/articles/2016/4/3_17-25.pdf)
- Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.
- Композиционные материалы: Справочник/ В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; Под общ.ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
- Абросимов Н.А. Методика построения разрешающей системы уравнений динамического деформирования композитных элементов конструкций. Учебно-методическое пособие. - Н. Новгород: 2010. - 40 с.
- Салов В.А., Солдатов С.А. Методические указания к курсовой работе «Исследование упругих и прочностных свойств слоистого композиционного материала» по курсу «Механика композиционных материалов» [электронный ресурс] / Режим доступа: <http://www.studfiles.ru/dir/cat41/subj1493/file17512/view164732.html>
- Поносков С.Е. Результаты испытания стеклопластиковых труб [электронный ресурс] / Режим доступа: [http://www.newchemistry.ru/printletter.php?n\\_id=953](http://www.newchemistry.ru/printletter.php?n_id=953).

Блазнов Алексей Николаевич – д.т.н., доцент, заведующий лабораторией материаловедения минерального сырья, ИПХЭТ СО РАН, тел. (3854)305885, e-mail: [blaznov74@mail.ru](mailto:blaznov74@mail.ru).

Зубков Александр Сергеевич – к.т.н., технический директор ООО «ЭЛЕКТРОМАШ», тел. 8 (383) 344-86-88 e-mail: [zas@fenix-88.ru](mailto:zas@fenix-88.ru).

Кротов Анатолий Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент, научный сотрудник, Алтайский государственный университет, тел. 8-962-799-00-24, e-mail: [askrotov@list.ru](mailto:askrotov@list.ru)

Самойленко Вячеслав Владимирович – ведущий инженер лаборатории материаловедения минерального сырья, ИПХЭТ СО РАН, тел. (3854)305906, e-mail: [labmineral@mail.ru](mailto:labmineral@mail.ru)

# MATHEMATICAL MODELING OF ELASTIC MODULUS OF COMPOSITE SANDWICH MATERIALS

A.N. Blaznov<sup>1</sup>, A.S. Zubkov<sup>2</sup>, A.S. Krotov<sup>3</sup>, V.V. Samoilenko<sup>1</sup>

*Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (IPCET SB RAS), Biysk*

*2 ELECTROMASH Ltd., Novosibirsk*

*3 Altai State University, Barnaul*

This work is focused on solving the problem of modeling behaviors of composite materials to reduce dimensions of the tower body of power transmission lines while preserving (or enhancing) the elastic modulus under flexure. The model allows the best estimates to be achieved for the elastic moduli longwise,  $E_{\alpha}$ , and crosswise,  $E_{\beta}$ , of the pipe and for shear modulus in the reinforcement plane of the pipe wall,  $G_{\alpha\beta}$ , by varying the input parameters: roving type (basalt or glass), filament-winding pattern, number of layers; and by varying the parameters of the starting components: elastic moduli, shear moduli, Poisson's ratio of the fiber and binder (matrix), and reinforcement ratio. To check the model, multilayer pipe specimens—mockups of the tower body—of 110 mm wide and 5–6 mm thick were fabricated from basalt and glass rovings. Five reinforcement layups were applied to each roving type in pipe winding, including: longitudinal-circumferential winding with interleaving layers at 90° and 5°, helical winding at 30° to 60° to the pipe axis, and combinations thereof (helical-longitudinal and helical longitudinal-circumferential). A nondestructive three-point transverse bending test was conducted on 1964, 1500, 1020, 808-mm pipes for each reinforcement pattern and the elastic modulus was experimentally measured. The highest elastic modulus was obtained with the longitudinal-circumferential winding and the lowest one with the helical winding. The glass-reinforced and basalt-reinforced polymer pipes had commensurable rigidities. The experimental data are in agreement with the model-predicted data when solving the inverse problem, with a deviation of up to 4.4%.

*Index terms: mathematical model, elastic modulus, strength, fiberglass-reinforced plastic, basalt fiber-reinforced plastic, tower body of transmission line, reinforcement lay-up schemes, composite materials.*

## REFERENCES

1. A.N. Blaznov, N.N. Khodakova, V.V. Samoilenko, S.S. Grebnev, I.A. Rodionov, A.A. Krasnov, Study of different winding patterns of items based on basalt and glass rovings, *South-Siberian Scientific Bulletin*, 2016, No. 4, pp.10-16 (in Russian)
2. N.N. Khodakova, A.N. Blaznov, V.V. Samoilenko, A.S. Krasnova, S.S. Grebnev, I.A. Rodionov, Effect of filament-winding pattern on formation of mechanical behavior of items from composites in longwise and crosswise directions. *South-Siberian Scientific Bulletin*, 2016, No. 4, pp. 17-25 (in Russian)
3. Vasiliev V.V. *Mechanics of composite structures*. Moscow, Engineering, 1988, 272 p.
4. V.V. Vasiliev, V.D. Protasov, V.V. Bolotin [et. all], *Composite materials: a guide*, Moscow, Engineering, 1990, 512 p.
5. Abrosimov N.A., *The method of constructing the resolving system of dynamic eformation of composite structural elements of equations: teaching aid*, Nizhni Novgorod, 40 p.
6. Salov V. A., Soldatov S.A. Methodical guidelines for course work study of the elastic and strength properties of the layered composite material for the course *Mechanics of Composite material*, access mode: <http://www.studfiles.ru/dir/cat41/subj1493/file17512/view164732.html>.
7. Ponosov C.E., *The results of tests of GRP*, access mode: [http://www.newchemistry.ru/printietter.php?n\\_id=953](http://www.newchemistry.ru/printietter.php?n_id=953).

*Blaznov Aleksey Nikolayevich – Dr. (Engin.), Assoc. Prof., Head of Laboratory of Materials Science and Mineral Raw Materials, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (IPCET SB RAS), 659322, Biysk, Altai Krai, 1 Socialisticheskaya st, 8 (3854) 30-58-82., e-mail: labmineral@mail.ru*

*Zubkov Aleksandr Sergeevich – Cand.Sci. (Engin.), Technical Director, ELECTROMASH Ltd., 630088, Novosibirsk, 51/3 Sibiryakov-Gvardeytsev st, 8 (383) 344-86-88, e-mail: zas@fenix-88.ru*

*Krotov Anatoly Sergeevich – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Research Scientist, Altai State University, 656049, Barnaul, 61 Lenina pr., 8-962-799-00-24, e-mail: askrotov@list.ru*

*Samoilenko Vyacheslav Vladimirovich – Senior Research Scientist, Laboratory of Materials Science and Mineral Raw Materials, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (IPCET SB RAS), 659322, Biysk, Altai Krai, 1 Socialisticheskaya st, 8 (3854) 30-59-06, e-mail labmineral@mail.ru*